

مقدمة في

نظرية الحلقات والحقول

(نظري - عملي)

يحتوي على 503 مسألة محلولة وغير محلولة

الأستاذ الدكتور

صفوان محمد عادل عويرة

مكتبة المننابي

AL MOTANABI BOOK SHOP

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمة :

الحمد لله الذي علّم بالقلم ، ويُعلّمكُم الله والله بكلّ شيءٍ عَلِيمٌ ، والصلاة والسلام على خير وأجود المعلمين ، المبعوث رحمة للعالمين ، سيّدنا مُحَمَّدٌ وَعَلَى آلِهِ الطيبين الطاهرين ، وصحابته الغرّ الميامين ، وبعد :

ظهر مفهوم الحلقة، عند دراسة الأعداد الصحيحة وكثيرات الحدود، وأول من أدخل هذا المفهوم، الرياضي الألماني هيلبرت David Hilbert (1862-1943 م) . لكن تعريف الحلقة المستخدم في هذا الكتاب وغيره من الكتب العلمية ، قُدّم من قِبَل الرياضية الألمانية أيمي نيوثر Emmy Noether (1882-1935 م) .

ونشير أيضاً ، إلى أن الرياضي كرونكر Kronecker (1823-1891 م) قدّم مفهوم الحلقة التامة ، كما عرّف الرياضي الشهير آبل Abel (1802-1829 م) الحقل ، بأنه نظام رياضي ذو عمليتين جبريتين .

يُعَدُّ هذا الكتاب امتداداً طبيعياً لكتاب (مقدمة في نظرية الزمر) ، حيث أن الكثير من التعاريف والمبرهنات الواردة في نظرية الحلقات والحقول مرتبطة بشكل كبير بنظرية الزمر ، فمثلاً التماثل الحلقي هو تعميم لمثيلاتها في نظرية الزمر ، كما أن مفهوم الزمر الجزئية الناظرية يقوم بالدور الذي تقوم به المثاليات في الحلقات .

يهدف الكتاب المقدّم إلى ما يلي :

- (أ)- استكمال دراسة البنى الجبرية ، والتي درس الطالب قسماً منها من خلال مقرر نظرية الزمر ، وبكلامٍ آخر ، التعمّق بعض الشيء في دراسة البنى الجبرية .
- (ب)- تزويد الطالب بجملة من الأدوات الجبرية ، التي ستساعده في دراسته المستقبلية ، أو في عمله التدريسي .

(ج)- ترجمة الأفكار الجبرية المجرّدة إلى لغة جبرية تطبيقية ، وذلك ، من خلال دراسة وحل التمارين المحلولة وغير المحلولة ، والتي تمكّن الطالب من استيعاب مقرر الحلقات والحقول بشكل جيد وتثبيت المعلومات في ذهن الطالب ،

وكسب الطالب الثقة بذاته في حل التمارين غير المحلولة .

حوى الكتاب على قسمين ، قسم نظري ، والآخر عملي .

شمل القسم النظري على سبعة فصول ، حيث غطت مفردات مقرر الحلقات والحقول، وحاولت في العرض أن أبرز الترابط بين كل فصل والفصول التي تليه، وأدعمَ المواضيع النظرية بأمثلة متنوعة وعديدة . وهذه الفصول النظرية هي :

- الفصل الأول : عُرِضَ فيه مفهوم الحلقة وخواصها والحلقة التامة ومفهوم الحقل .

- الفصل الثاني : قُدِّمَ فيه مفهوم الحلقات والحقول الجزئية ، وتعريف المثالية وأنواعها والعمليات عليها .

- الفصل الثالث : دُرِسَ فيه نظرية التشاكلات الحلقية ، وبعض الحلقات الخاصة ، مثل حلقة المثاليات الرئيسية ، الحلقة الإقليدية ، وحلقة التحليل الوحيد ، وحقل القواسم ، كما قُدِّمَ فيه أساس جاكسون .

- الفصل الرابع : والمُعنونَ بحلقة كثيرات الحدود ، قُدِّمَ فيه خوارزمية القسمة ومبرهنة الباقي والعامل ، وكثيرات الحدود غير القابلة للتحليل والاختبارات المناسبة لها ، كذلك عُرِضَ فيه حلقة القسمة لكثيرات الحدود على حقل .

- الفصل الخامس : وجاء بعنوان الفضاءات الحلقية ، ودُرِسَ فيه مفهوم الفضاء الحلقي ، والفضاء الحلقي الجزئي ، والفضاءات الحلقية منتهية التوليد ، والفضاء الحلقي لخارج القسمة ، والتشاكلات في الفضاءات الحلقية .

- الفصل السادس ، وكان بعنوان تمديد الحقول ، وفيه تمَّت دراسة حقول الانشطار والحقول المنتهية وحقل جالوا ، والامتداد القابل للفصل والامتداد الناظمي .

- تناولنا في الفصل السابع والأخير الحلقات الارتينية والنوثرية وخواصهما الأساسية ، وعلاقة بعض المثاليات في الحلقة النوثرية ، وعلاقة الحلقة الارتينية بالحلقة النوثرية .

أما القسم العملي ، شمل على مجموعة جيدة متنوعة وعديدة ، من التمارين المحلولة وغير المحلولة ، مرتبة حسب ترتيب الفصول النظرية الواردة في هذا الكتاب ، وتهدف إلى تدعيم فهم الطالب للمقرر واستيعابه على أكمل وجه ، وكانت هذه التمارين شاملة لجميع الجوانب النظرية .

كما زُوِّدَ الكتابُ بدليل للمصطلحات العلمية ، وقائمة بالمراجع العلمية المستخدمة
وبعض الرموز المتداولة في متن الكتاب .

أخيراً :

إن هذا الكتاب لم يُؤلَّفْ ليسدَّ نقصاً في المكتبة العربية ، ولا أدَّعي أنه يقدم كشفاً
جديداً في نظرية الحلقات والحقول ، بل أقدمه تلبيةً لحاجة الطالب العربي ، ليكون
عوناً له في دراسته وفي حياته العملية ، وإنني لأرجو الله الكريم أن أكون قد وفَّقتُ
في هدفي هذا لما فيه خير للمملكة العربية السعودية المعطاءة ، والوطن العربي
الحبيب ، والله ولي التوفيق .

الأستاذ الدكتور

صفوان محمد عادل عويرة

الدمام في / / ١٤٢٧

المحتوى
(أ) القسم النظري

الصفحة	الموضوع
i.....	مقدمة
iv.....	المحتوى

الفصل الأول : الحلقة والحلقة التامة

٦.....	(1-1) مفهوم الحلقة
٧.....	(2-1) أمثلة
١٣.....	(3-1) بعض خواص الحلقة $(R, +, \cdot)$
١٦.....	(4-1) حلقة الأعداد الصحيحة قياس n
١٨.....	(5-1) الحلقة التامة (المناطق التكاملية)
٢٣.....	(6-1) مميز حلقة
٢٥.....	(7-1) الحقل

الفصل الثاني : الحلقات والحقول الجزئية والمثاليات

٣٣.....	(1-2) الحلقة الجزئية
٣٤.....	(2-2) أمثلة
٣٨.....	(3-2) بعض العمليات على الحلقات الجزئية
٤٠.....	(4-2) الحقول الجزئية
٤١.....	(5-2) أمثلة
٤٤.....	(6-2) المثاليات
٤٧.....	(7-2) أمثلة
٤٩.....	(8-2) العمليات على المثاليات
٤٩.....	① جمع المثاليات
٥٠.....	② تقاطع مثاليات
٥١.....	③ ضرب (جداء) المثاليات
٥٣.....	④ قسمة المثاليات
٥٤.....	⑤ جذر المثاليات

- ٥٦ حلقة القسمة (9-2)
- ٦٠ أمثلة (10-2)

الفصل الثالث : التماثل الحلقي

- ٦٥ تعريف التشاكل (1-3)
- ٦٦ أمثلة (2-3)
- ٦٩ مفاهيم وملاحظات (3-3)
- ٨٣ بعض الحلقات الخاصة (4-3)
- ٨٤ أولاً: حلقة المثاليات الرئيسية
- ٩٣ ثانياً: الحلقات المنتظمة
- ٩٧ ثالثاً: الحلقة الإقليدية
- ١٠٤ رابعاً : حلقة التحليل الوحيد
- ١٠٤ 1- القاسم المشترك الأعظم
- ١٠٥ 2- المضاعف المشترك الأصغر
- ١٠٦ 3- العناصر الأولية والعناصر غير القابلة للتحليل
- ١١٤ (5-3) حقل القواسم
- ١١٧ مبرهنة الغمر
- ١٢١ (6-3) أساس جاكبسون وجذر المثالية

الفصل الرابع : حلقة كثيرات الحدود

- ١٢٩ (1-4) تعاريف ومفاهيم أساسية
- ١٣٦ (2-4) أمثلة
- ١٣٩ (3-4) خوارزمية القسمة
- ١٤١ (4-4) مبرهنة العامل
- ١٤٢ (5-4) مبرهنة الباقي
- ١٤٦ (6-4) القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود
- ١٤٩ (7-4) المضاعف المشترك الأصغر
- ١٥١ (8-4) كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل

الموضوع	الصفحة
(9-4) كثيرة الحدود البدائية (الأولية)	١٥٦
(10-4) حلقة القسمة لكثيرات الحدود فوق حقل	١٦٦
الفصل الخامس : الفضاءات الحلقية (الحلقيات)	
(1-5) تعاريف ومفاهيم أساسية	١٧٥
(2-5) أمثلة	١٧٨
(3-5) الفضاءات الحلقية الجزئية	١٨٢
(4-5) الفضاءات الحلقية منتهية التوليد	١٨٧
(5-5) المجموع المباشر للفضاءات الحلقية	١٩١
(6-5) الفضاء الحلقى لخارج القسمة	١٩٤
(7-5) تشاكل الفضاءات الحلقية	١٩٧
(8-5) أمثلة	٢٠١
(9-5) المبرهنات الأساسية للتشاكل في الفضاءات الحلقية	٢٠٣
(10-5) الفضاءات الحلقية الحرة	٢٠٥
(11-5) الفضاء الحلقى البسيط	٢١٠

الفصل السادس : تمديد الحقول

(1-6) تعاريف	٢١٧
(2-6) أمثلة	٢١٨
(3-6) أمثلة	٢٢٥
(4-6) حقول الانشطار	٢٣٠
(5-6) الحقول المنتهية	٢٣٨
(6-6) الامتداد القابل للفصل	٢٤٢
(7-6) الحقول التامة	٢٤٤
(8-6) الامتداد الناظمي	٢٤٥

الفصل السابع : الحلقات الارتينية والنوثرية

(1-7) تعاريف	٢٥١
--------------	-----

الموضوع	الصفحة
(2-7) أمثلة	٢٥٢
(3-7) بعض خصائص للحقتين الارتينية والنوثرية	٢٥٣
(4-7) بعض خواص المثاليات في الحلقة النوثرية	٢٥٩
(5-7) العلاقة بين الحلقة الارتينية والنوثرية	٢٦٥

(ب) القسم العملي

1- تمارين محلولة للفصل الأول : الحلقة والحلقة التامة	٢٧١
2- تمارين غير محلولة للفصل الأول	٢٨٥
3- تمارين محلولة للفصل الثاني : الحلقات والحقول الجزئية والمثاليات	٢٩١
4- تمارين غير محلولة للفصل الثاني	٢٩٩
5- تمارين محلولة للفصل الثالث : التماثل الحلقي	٣٠٥
6- تمارين غير محلولة للفصل الثالث	٣٢٧
7- تمارين محلولة للفصل الرابع : حلقة كثيرات الحدود	٣٣٥
8- تمارين غير محلولة للفصل الرابع	٣٤٧
9- تمارين محلولة للفصل الخامس : الفضاءات الحلقية (الحلقيات)	٣٥٩
10- تمارين غير محلولة للفصل الخامس	٣٨١
11- تمارين محلولة للفصل السادس : تمديد الحقول	٣٨٩
12- تمارين غير محلولة للفصل السادس	٣٩٩
13- تمارين محلولة للفصل السابع : الحلقات الارتينية والنوثرية	٤٠٧
14- تمارين غير محلولة للفصل السابع	٤١١
ثبت المصطلحات العلمية	٤١٥
الرموز المستخدمة	٤٣١
المراجع	٤٣٧

(أ) القسم النظري

الفصل الأول

الحلقة والحلقة التامة

*Ring & Integral
domains*

الفصل الأول

الحلقة والحلقة التامة

Ring & Integral domains

درسنا ، في نظرية الزمر ، مجموعات مزودة بعملية ثنائية واحدة ، ورمزنا لهذه العملية بأحد الرموز \star ، \perp ، o ، $+$ ، \cdot ، سندرس الآن مجموعات مزودة بقانوني تشكيل داخليين . فمثلاً نرمز للأول بـ \star والثاني بـ o أو $(+)$ للأول و (\cdot) للثاني . أو أي رمزين آخرين .

نسمي هذه المجموعة المزودة بقانوني التشكيل الداخليين السابقين اسم حلقة Ring ، إذا حققت شروطاً معينة سنقدمها بعد قليل .

تعد الحلقة إحدى أهم البنى الجبرية ، لما لها من ارتباط بني جبرية جديدة ، ولأنها تدخل في كثير من التخصصات الرياضية المهمة والمتنوعة .

يعد الرياضي الألماني (David Hillert 1869-1943) أول من أدخل مفهوم الحلقة وكان ذلك عام 1879 .

لندكر القارئ الكريم بالمفاهيم التالية :

1- العملية الثنائية على مجموعة غير خالية ولتكن S هي تطبيق :

$\varphi: S \times S \rightarrow S$ ، حيث تمثل $S \times S$ الجداء الديكارتي لـ S في نفسها ، أي أن $S \times S$ هي مجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a, b \in S$. نكتب عادةً صورة الزوج المرتب (a, b) تحت تأثير φ بالشكل $a \star b$ حيث \star الرمز المناسب للعملية الثنائية . لاحظ ، أن الترتيب مهم ، حيث أنه من المحتمل أن يكون $a \star b$ و $b \star a$ عنصرين مختلفين في S . وفي حالة كون $a \star b = b \star a$ لكل $a, b \in S$ فإن العملية \star تسمى إبدالية Commutative .

2- شبه الزمرة (Semigroup) : هي مجموعة غير خالية ، ولتكن S مزودة

بعملية ثنائية \star تحقق خاصية التجميع أو (الدامجة) أو التجميعية ، أي أن :

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c) \quad \text{لكل } a, b, c \in S .$$

3- الزمرة (Group) : هي مجموعة غير خالية ، ولتكن G مع عملية ثنائية \star بحيث تتحقق الشروط التالية :

(1) تشكل (G, \star) شبه زمرة .

(2) يوجد عنصر e من G يحقق $a \star e = e \star a = a$ لكل $a \in G$. يسمى العنصر e بالعنصر المحايد (Identity element) .

(3) لكل عنصر $a \in G$ معكوس (Inverse) وليكن $\bar{a} \in G$ بحيث يتحقق :

$$a \star \bar{a} = \bar{a} \star a = e$$

(1-1) مفهوم الحلقة :

لتكن R مجموعة ما غير خالية ، ولتكن $(+)$ و (\cdot) عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على R . نقول عن الثلاثية $(R, +, \cdot)$ إنها حلقة بالنسبة للعمليتين $(+)$ و (\cdot) إذا تحققت الشروط التالية :

1- $(R, +)$ زمرة إبدالية (Abelian group) .

2- (R, \cdot) شبه زمرة (نصف زمرة) (Samigroup) .

3- العملية (\cdot) توزيعية (Distributive) على العملية $(+)$ من اليمين واليسار .
أو بكلام آخر ترتبط العمليتان $(+)$ و (\cdot) فيما بينهما بعملية توزيع الضرب على الجمع من الطرفين ، وهذا يعني :
من أجل أي a, b, c من R ، فإن :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

إذا كانت العملية (\cdot) بالإضافة إلى الشروط السابقة ، عملية إبدالية على عناصر المجموعة R ، فإننا نقول إن الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي حلقة إبدالية Commutative ring إذا وُجد في المجموعة R عنصر محايد بالنسبة لعملية

(٥) (هذا العنصر وحيد) فإننا نقول عن هذا العنصر إنه عنصر وحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وسنرمز له بالرمز 1 أي أن : لكل $a \in R$ ، فإن $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
ونقول في هذه الحالة ، إن الحلقة $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة أو حلقة ذات عنصر وحدة أو حلقة بمحايد (Ring with identity) .

ملاحظة (1) :

نؤكد أن (+) و(•) تمثلان عمليتين ثنائيتين مجردتين ، وليس عمليتي الجمع والضرب العاديتين .

ونرمز للمعكوس الضربي أي بالنسبة لعملية الضرب (•) للعنصر a في R بالرمز \bar{a} ويسمى معكوس (مقلوب) العنصر a . أما المعكوس الجمعي للعنصر a في R نرمز له بـ $-a$ ويسمى بالمعكوس (نظير) الجمعي للعنصر a في R .
سنرمز لصفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 0 .

نسمي العملية الجبرية الثنائية (-) المعرفة على R بالشكل :

$$a - b = a + (-b) , \forall a, b \in R \quad \text{عملية الطرح}$$

وبالتالي يتحقق ما يلي :

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a , \forall a, b, c \in R$$

لأن من قانون التوزيع الضربي على الجمع نجد أن :

$$a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c)$$

$$= a \cdot b + (-a \cdot c) = a \cdot b - a \cdot c$$

وبنفس الطريقة ، نثبت أن :

$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

(2-1) أمثلة :

1- المجموعات العددية التالية : Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) ، Q (مجموعة

الأعداد النسبية الكسرية) ، R (مجموعة الأعداد الحقيقية) تشكل حلقة إبدالية وبمحايد بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين .

أي أن $(Z, +, \cdot)$ و $(Q, +, \cdot)$ و $(R, +, \cdot)$ حلقات إبدالية بمحايد .

2- مجموعة الأعداد المركبة C بالنسبة لعمليتي $(+)$ و (\cdot) المعرفتين بالشكل :

$$x = a + ib, y = c + id : \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

حيث أن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $i = \sqrt{-1}$.

$$x + y = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$$

$$x \cdot y = (a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$$

تشكل حلقة إبدالية بمحايد .

تسمى حلقة الأعداد المركبة $(C, +, \cdot)$ حلقة جاوس الصحيحة (ring of Gaussian integers).

3- مجموعة الأعداد الفردية ، لا تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب

العاديتين لأنه على سبيل المثال ، حاصل جمع عددين فرديين هو عدد زوجي ، لذا فإن مجموعة الأعداد الفردية (ليست عملية ثنائية) ليست مغلقة بالنسبة لعملية الجمع العادي .

4- يمكن التحقق من أن المجموعة $Z[\sqrt{5}] = \{ a + b\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Z} \}$

تشكل حلقة إبدالية بمحايد ، بالنسبة للعمليتين الجمع والضرب العاديتين حيث أن : $0 + 0\sqrt{5}$ هو صفر الحلقة (المحايد الجمعي) و $1 + 0\sqrt{5}$ عنصر الوحدة (المحايد الضربي) .

5- إن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات حيث أن :

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

إن صفر هذه الحلقة هو المصفوفة الصفرية $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ وعنصر الوحدة فيها هو

المصفوفة الواحدية $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. لكنها ليست إبدالية ، فعلى سبيل المثال :

$$\forall \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

فإن :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ملاحظة (2) :

يمكن تعميم المثال السابق بالشكل :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ، وإذا كانت $M_n(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة n والتي عناصرها من R ، فإن $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات . حيث أن المصفوفة الصفرية من الدرجة n هي صفر الحلقة ، المصفوفة الواحدية من المرتبة n هي عنصر الوحدة فيها .

6- إذا كانت M مجموعة جميع التطبيقات $f: R \rightarrow R$. ولنعرّف العمليتين

الثائيتين $(+)$ و (\cdot) بالشكل :

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \quad \forall a \in R$$

$$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) \quad \forall a \in R$$

عندئذ تكون $(M, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد .

إن التطبيق $I_0: R \rightarrow R$ المعرف بـ $i_0(x) = 0$ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع (المحايد الجمعي) $x \in R$ ، كما أن $I_1: R \rightarrow R$ المعرف بـ $I_1(x) = 1$ هو عنصر الوحدة بالنسبة لعملية الضرب (المحايد الضربي) .

7- لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين إبداليتين واحديتين ولنرمز بـ 0 و $0'$

لصفرهما على الترتيب . وإذا كانت $D = \{(a,b) ; a \in R, b \in S\}$ ، ولنعرف على المجموعة D العملية الثنائية Δ و \perp بالشكل التالي :

$$(x,y) \Delta (x_1,y_1) = (x + x_1, y T y_1)$$

$$(x,y) \perp (x_1,y_1) = (x \cdot x_1, y \star y_1)$$

وذلك من أجل أي (x,y) و (x_1,y_1) من D ، عندئذ تكون (D, Δ, \perp) حلقة إبدالية واحدة .

الحل :

(1) من تعريف المجموعة D ، نرى أن $D \neq \phi$.

(2) العملية Δ دامجة (تجميعية) على عناصر D لأنه إذا كان :

$$(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) \in D$$

$$\begin{aligned} [(x_1,y_1) \Delta (x_2,y_2)] \Delta (x_3,y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 T y_2) \Delta (x_3,y_3) \\ &= [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 T y_2) T y_3] \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3), y_1 T (y_2 T y_3)] \\ &= (x_1,y_1) \Delta (x_2 + x_3, y_2 T y_3) \\ &= (x_1,y_1) \Delta [(x_2,y_2) \Delta (x_3,y_3)] \end{aligned}$$

(3) العملية Δ إبدالية على عناصر D لأن إذا كان $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ عنصرين

ما من D ، فإن :

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) \Delta (x_2,y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 T y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 T y_1) = (x_2,y_2) \Delta (x_1,y_1) \end{aligned}$$

(4) إن $(0,0')$ عنصراً محايداً في المجموعة D بالنسبة للعملية Δ ، لأن من

جهة أولى $(0,0')$ عنصر من D ، ومن ناحية ثانية ، إن :

$$(x,y) \Delta (0,0') = (x+0, yT0') = (x,y) ; \forall (x,y) \in D$$

(5) ليكن (x,y) عنصراً ما من D ، إن $(-x,-y)$ هو معكوس (نظير) العنصر

(x,y) في D بالنسبة للعملية Δ ، حيث $-x$ هو معكوس x في R بالنسبة للعملية $+$

و $-y$ هو معكوس العنصر y في S بالنسبة للعملية T ، لأن $(-x, -y)$ عنصراً من D أولاً ، ثم أن :

$$(x, y) \Delta (-x, -y) = (x + (-x), y T (-y)) = (0, 0')$$

مما سبق نستنتج أن (D, Δ) زمرة إيدالية .

لنثبت الآن أن (D, \perp) شبه زمرة ، أي أن العملية \perp تجميعية على عناصر المجموعة D .

6- لتكن (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) عناصر من المجموعة D ، فإن :

$$\begin{aligned} [(x, y) \perp (x_1, y_1)] \perp (x_2, y_2) &= (x \cdot x_1, y \star y_1) \perp (x_2, y_2) \\ &= [(x \cdot x_1) \cdot x_2, (y \star y_1) \star y_2] \\ &= [x \cdot (x_1 \cdot x_2), y \star (y_1 \star y_2)] \\ &= (x, y) \perp [(x_1 \cdot x_2), (y_1 \star y_2)] \\ &= (x, y) \perp [(x_1, y_1) \perp (x_2, y_2)] \end{aligned}$$

لنبرهن أن Δ و \perp يحققان قانوني التوزيع .

7- ليكن (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) عناصر من D ، فإن :

$$\begin{aligned} (x, y) \perp [(x_1, y_1) \Delta (x_2, y_2)] &= (x, y) \perp (x_1 + x_2, y_1 T y_2) \\ &= [x \cdot (x_1 + x_2), y \star (y_1 T y_2)] \\ &= [(x \cdot x_1) \cdot x_2, y \star (y_1 T y_2)] \\ &= [(x \cdot x_1 + x \cdot x_2), (y \star y_1) T (y \star y_2)] \\ &= (x \cdot x_1, y \star y_1) \Delta (x \cdot x_2, y \star y_2) \\ &= [(x, y) \perp (x_1, y_1)] \Delta [(x, y) \perp (x_2, y_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1) \Delta (x_2, y_2)] \perp (x, y) &= (x_1 + x_2, y_1 T y_2) \perp (x, y) \\ &= [(x_1 + x_2) \cdot x, (y_1 T y_2) \star y] \\ &= (x_1 \cdot x + x_2 \cdot x, y_1 \star y T y_2 \star y) \\ &= (x_1 \cdot x, y_1 \star y) \Delta (x_2 \cdot x, y_2 \star y) \\ &= [(x_1, y_1) \perp (x, y)] \Delta [(x_2, y_2) \perp (x, y)] \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق أن (D, Δ, \perp) حلقة .

لنثبت الآن ، أن الحلقة (D, Δ, \perp) إبدالية . علماً أن كلاً من الحلقتين $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) إبداليتين . ليكن $(x, y), (x_1, y_1)$ عنصرين من D ، فإن :

$$\begin{aligned} (x, y) \perp (x_1, y_1) &= (x \cdot x_1, y \star y_1) \\ &= (x_1 \cdot x, y_1 \star y) \\ &= (x_1, y_1) \perp (x, y) \end{aligned}$$

لنثبت أخيراً أن الحلقة (D, Δ, \perp) واحدية (ذات عنصر وحدة) .

لنرمز بـ 1 للعنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وبـ e لعنصر الوحدة في الحلقة (S, T, \star) . عندئذ يكون $(1, e)$ هو عنصر وحدة في الحلقة (D, Δ, \perp) ، لأنه ، أولاً $(1, e)$ عنصر من D . وإذا كان (x, y) عنصراً ما من D ، فإن :

$$\begin{aligned} (x, y) \perp (1, e) &= (x \cdot 1, y \star e) = (x, y) = (1 \cdot x, e \star y) \\ &= (1, e) \perp (x, y) \end{aligned}$$

إذاً (D, Δ, \perp) حلقة إبدالية واحدية .

نتيجة (1) :

تماماً ، كما في نظرية الزمر ، إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، محايدتها بالنسبة لعملية $(+)$ هو 0 وإذا كان a عنصراً من R و n عدداً صحيحاً موجباً ، فإننا نستخدم ما يلي :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = a^n \quad , \quad 0 \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ مرة}} = n \cdot a \quad \text{و} \quad n(-a) = (-n)a = -(na) \quad (2)$$

$$m_1 (m_2 \cdot a) = (m_1 \cdot m_2) \cdot a \quad (3)$$

$$m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a \quad (4)$$

$$(a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot n_2} \quad (5)$$

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1 + n_2} \quad (6)$$

من أجل أي عددين صحيحين m_1 و m_2 و n_1 و n_2 عددين صحيحين موجبين .

وإذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة و e هو العنصر المحايد فيها ، وإذا كان a عنصراً ما منها ، فإن : $(a^{-1})^n = a^{-n}$ حيث a^{-1} معكوس العنصر a في R بالنسبة للعملية (\cdot) و n عدد صحيح موجب . ونصطلح على اعتبار $a^0 = e$. ويمكن التحقق من صحة ما يلي :

$$(a^{-1})^{n_1} = (a^{n_1})^{-1} \quad -1$$

$$(a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot n_2} \quad -2$$

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1 + n_2} \quad -3$$

وذلك من أجل أي عددين صحيحين n_1 و n_2 .

(3-1) بعض خواص الحلقة $(R, +, \cdot)$:

نقدم بعض الخواص الأساسية للحلقة $(R, +, \cdot)$ من خلال المبرهنات والنتائج التالية :

مبرهنة (1) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ، ولنرمز لصفرها بـ 0 عندئذ يتحقق ما يلي :

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$(-c) \cdot a = -c \cdot a , a \cdot (-c) = -a \cdot c \quad (2)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad (3) \text{ وذلك من أجل أي } a, b \text{ من } R .$$

البرهان :

(1) بما أن العلاقتين :

$$\left. \begin{aligned} a \cdot (b - c) &= a \cdot b - a \cdot c \\ (b - c) \cdot a &= b \cdot a - c \cdot a \end{aligned} \right\} (*)$$

صحيحتان من أجل أي a, b, c من R ، فهما صحيحتان من أجل الحالة $b = c$ بوضع في العلاقتين السابقتين $b = c$ نجد :

$$\left. \begin{aligned} a \cdot (b - b) &= a \cdot b - a \cdot b \Rightarrow a \cdot 0 = 0 ; \forall a \in R \\ (b - b) \cdot a &= b \cdot a - b \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0 \end{aligned} \right\}$$

(2) بما أن العلاقتين السابقتين (*) صحيحتان من أجل أي c, b, a من R ، فهما صحيحتان من أجل $b = 0$. بوضع $b = 0$ في العلاقتين (*) وبملاحظة (1) نجد :

$$a(o - c) = a.o - a.c \Rightarrow a.(-c) = -a.c$$

$$(o - c).a = -c.a ; \forall a, c \in R$$

(3) بتبديل في (2) كل a ب $-a$ نجد :

$$a.(-c) = -a.c$$

$$(-a).(-c) = -(-a).c$$

$$(-a).(-c) = -(-a.c) = a.c$$

ونسمي الحلقة التي تحوي الصفر فقط بالحلقة الصفرية (Zero ring) .

نتيجة (2) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة ، (نرمز لعنصر الوحدة فيها بـ 1) ولصفرها بـ 0 فإذا كانت $R \neq \{0\}$ ، فإن $1 \neq 0$ و $(-1).a = -a$

البرهان :

بما أن $R \neq \{0\}$ ، عندئذ يوجد $a \in R$ بحيث $a \neq 0$. لنفرض جـداً أن $1 = 0$ ، عندئذ ، يكون $0 = a.0 = a.1 = a$ أي أن $a = 0$ وهذا مخالف للفرض أن $a \neq 0$ ، وبذلك يكون الفرض الجدلي خاطئ ، إذن $1 \neq 0$.

لنبرهن ، أن $(-1).a = -a$.

حسب المبرهنة (1) السابقة في الفقرة (2) نجد :

$$(-1).a = -(1.a) = -a ; \forall a \in R$$

سنفرض من الآن ، أن كل حلقة واحدة ، تحتوي على أكثر من عنصر واحد .

نتيجة (3) :

لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، إذا وُجد في R عنصر الوحدة ، فإنه سيكون وحيداً . وإذا وجد لعنصر ما من R معكوس ، فإنه يكون وحيداً أيضاً .

البرهان :

ليكن 1 و 1' عنصرين محايدين للحلقة الواحدية $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$1 = 1 \cdot 1' = 1'$$

وإذا كان a_1 و a_2 معكوسين للعنصر a في الحلقة الواحدية $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$a_2 = a_2 \cdot 1 = a_2 \cdot (a \cdot a_1) = (a_2 \cdot a) \cdot a_1 = 1 \cdot a_1 = a_1$$

إذاً $a_1 = a_2$.

مبرهنة (2) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر الوحدة ، إذا كانت G_R مجموعة عناصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ ، (G_R, \cdot) زمرة .

البرهان :

المجموعة $G_R \neq \emptyset$ ، لأنها تحوي على الأقل العنصر المحايد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ والذي هو نفسه العنصر المحايد في المجموعة G_R .

إذا كان a, b عنصرين ما من G_R ، فإنه يوجد عنصران a^{-1}, b^{-1} من R بحيث يكون :

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 , b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1$$

وبالتالي فإن :

$$(a \cdot b) (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a \cdot 1 \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) (a \cdot b) = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot 1 \cdot b = b^{-1} \cdot b = 1$$

وهذا يعني أن $a \cdot b \in G_R$ (مغلقة) .

بما أن (R, \cdot) تجميعية، فإن عملية الضرب تجميعية على عناصر المجموعة G_R لأنها $G_R \subseteq R$. إذن (G_R, \cdot) زمرة .

نسمي عادةً الزمرة (G_R, \cdot) بزمرة الوحدات (Group of units) للحلقة R .

(4-1) حلقة الأعداد الصحيحة قياس n :

(ring of integres modultion)

نذكر القارئ الكريم أولاً، بمفهوم التطابق قياس n (Congruent modulo n) .
ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ، نقول إن العددين الصحيحين a, b متطابقان قياس n
إذا ، فقط إذا، كان $a - b$ يقبل القسمة على n وهذا يكافئ $a - b = k.n$ حيث k
عدد صحيح ، ونكتب بذلك : $a \equiv b \pmod{n}$.

إن علاقة التطابق قياس n هي علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة وأن
فصول التكافؤ لهذه العلاقة هي : $[0], [1], \dots, [n-1]$ حيث أن :

$$[x] = \{ x + t.n ; t \in \mathbb{Z} \}$$

نسمي Z_n مجموعة الأعداد الصحيحة قياس n ، حيث Z_n مجموعة فصول التطابق
قياس n .

وإذا عرفنا على المجموعة Z_n العمليتين الثنائيتين \oplus و \otimes بالشكل :

$$[x] \oplus [y] = [x + y]$$

$$[x] \otimes [y] = [x \cdot y] ; \forall [x], [y] \in Z_n$$

عندئذٍ (Z_n, \oplus, \otimes) حلقة إبدالية بمحايد (ذات عنصر وحدة) .

نسمي عادةً هذه الحلقة بحلقة الأعداد الصحيحة قياس n .

البرهان :

لنبرهن أولاً أن العمليتين الثنائيتين \oplus و \otimes معرفتين جيداً (حسنة التعريف) ، من

أجل ذلك ، ليكن $[x] = [x_1]$ و $[y] = [y_1]$ ، وبالتالي فإن :

$$x \equiv x_1 \pmod{n} , y \equiv y_1 \pmod{n}$$

أي أن $n / (x_1 - x)$ و $n / (y_1 - y)$ ، وهذا يؤدي إلى أن : $n / [(x_1 + y_1) - (x + y)]$

وبالتالي فإن : $(x_1 + y_1) \equiv (x + y) \pmod{n}$ ، أي أن : $[x + y] = [x_1 + y_1]$.

إن ، عملية الجمع \oplus معرفة جيداً . لنبرهن أيضاً ، وبنفس الطريقة أن عملية

الضرب \otimes معرفة جيداً :

ليكن $[x] = [x_1]$ ، $[y] = [y_1]$ وهذا يؤدي إلى أن :

$x_1 - x = k_1.n$ و $y_1 - y = k_2.n$ حيث k_1 و k_2 عدنان صحيحان ، إذن :

$$x_1.y_1 = (x + k_1.n) (y + k_2.n) = x.y + xk_2n + yk_1.n + k_1k_2.n^2$$

وهذا يعطي : $x_1.y_1 \equiv x.y \pmod{n}$ ، ومنه $[x_1.y_1] = [x.y]$.

إذن عملية الضرب \otimes معرفة جيداً أيضاً . أي أن العمليتين \otimes, \oplus لا تتعلقان بالمثلين المختارين لفصلي التكافؤ .

لنبرهن الآن أن (Z_n, \oplus) زمرة إبدالية .

ليكن $[x], [y], [z]$ من Z_n وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} ([x] \oplus [y]) \oplus [z] &= [x + y] \oplus [z] = [x + y + z] \\ &= [x + (y + z)] = [x] \oplus [y + z] \\ &= [x] \oplus ([y] \oplus [z]) \end{aligned}$$

كما أن :

$$[x] \oplus [y] = [x + y] = [y + x] = [y] \oplus [x]$$

لاحظ أننا استفدنا من كون عملية الجمع العادي + عملية تجميعية وإبدالية على Z .

إن $[0]$ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع \oplus ، وكذلك $[n-x]$ هو معكوس للعنصر $[x]$ وهذا ينتج حسب تعريف عملية الجمع \oplus .

إذن (Z_n, \oplus) زمرة إبدالية .

لنثبت الآن ، أن عملية الضرب \otimes تجميعية على عناصر Z_n :

بما أن عملية الضرب العادي (\cdot) عملية تجميعية على عناصر Z_n ، فيكون :

$$\begin{aligned} ([x] \otimes [y]) \otimes [z] &= [x.y] \otimes [z] = [(x.y).z] = [x.(y.z)] \\ &= [x] \otimes [y.z] = [x] \otimes ([y] \otimes [z]) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن عملية \otimes تجميعية على عناصر Z_n .

لنبرهن أن عملية الضرب \otimes توزيعية على الجمع \oplus من اليسار ، وبالطريقة نفسها ،

نبرهن أن عملية الضرب \otimes توزيعية على الجمع \oplus من اليمين .

$$\begin{aligned} [x] \otimes ([y] \oplus [z]) &= [x] \otimes [y + z] = [x \cdot (y+z)] = [x \cdot y + x \cdot z] \\ &= [x \cdot y] \oplus [x \cdot z] = ([x] \otimes [y]) \oplus ([x] \otimes [z]) \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق ، أن (Z_n, \oplus, \otimes) تشكل حلقة محايد وهو [1] . وبما أن عملية الضرب العادي في Z هي عملية إبدالية ، فإن :

$$[x] \otimes [y] = [x \cdot y] = [y \cdot x] = [y] \otimes [x]$$

إذن (Z_n, \oplus, \otimes) حلقة إبدالية محايد .

(5-1) الحلقة التامة (المناطق التكاملية) Integral domains

القاسم اليميني والقاسم اليساري للصفري في حلقة :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولنرمز لصفرها بـ 0 ، وليكن a عنصراً ما من A ، نقول عن a إنه قاسم يميني للصفري في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا وجد في R عنصراً ، وليكن $b \neq 0$ بحيث يكون $b \cdot a = 0$.

ونقول عن a إنه قاسم يساري للصفري في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا وجد في R عنصراً ، وليكن $c \neq 0$ بحيث يكون : $a \cdot c = 0$.

ينتج من التعريف السابق ما يلي :

(1) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، و 0 صفرها ، وإذا كانت $\{0\} \neq R$ ، فإن 0 هو قاسم يميني ويساري للصفري في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، لأنه ، إذا كان $a \neq 0$ عنصراً من R ، فإن :

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

(2) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة ، وإذا كان a عنصراً منها ، وله معكوس فيها ، فإن a لا يمكن أن يكون قاسماً يسارياً ولا يمينياً للصفري في هذه الحلقة .

البرهان :

لنرمز بـ 1 لعنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ولصفرها بالرمز 0 . إن العنصر a من R لا يمكن أن يكون قاسماً يسارياً للصفري فيها ، لأنه إذا كان a

قاسماً يسارياً للصفر فيها ، فإنه بالإمكان إيجاد عنصر وليكن $b \neq 0$ من R وبحيث يكون $a \cdot b = 0$ ، لكن :

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \Rightarrow$$

$$1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$$

وهذا مخالف لكون $b \neq 0$.

وبالطريقة نفسها ، نثبت أن العنصر a من R لا يمكن أن يكون قاسماً يمينياً للصفر في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

ملاحظة (2) :

عندما نقول إن الحلقة $(R, +, \cdot)$ لا تحوي قواسم للصفر (Zero divisor) نقصد

بذلك إن لم يكن بالإمكان إيجاد عنصرين a, b من R بحيث يكون :

$$a \neq 0 , b \neq 0 , a \cdot b = 0$$

حيث 0 هو صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$.

مثال (1) :

لتكن $(M_2(R), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة الحقيقية من الدرجة الثانية . إن

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ، حيث d, c من R ، قاسم للصفر من اليمين وأن قاسم

للصفر من اليسار ، في الحلقة $(M_2(R), +, \cdot)$.

الحل :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ ، أولاً أن :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

مثال (2) :

العدد 2 هو قاسم للصفر في الحلقة (Z_4, \oplus, \otimes) ، وكذلك العددين 2 و 3 في الحلقة (Z_6, \oplus, \otimes) .

إن مجموعة الأزواج المرتبة $S = \{(a,b) : a,b \in Z\}$ مع عمليتي الجمع والضرب التاليتين :

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

تشكل حلقة إبدالية وبمحايد ، حيث أن صفرها هو $(0,0)$ ومحايدها هو $(1,1)$.
كما أن $(1,0)$ قاسم للصفر لأن :

$$(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$$

علماً أن : $(0,1) \neq 0, (1,0) \neq 0$.

الحلقة التامة (المنطقة التكاملية) (Integral domain) :

الحلقة التامة ، هي حلقة إبدالية بمحايد ، ولا تحوي قواسم للصفر .

مثال (3) :

إن حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ هي حلقة تامة ، لأنها حلقة إبدالية بمحايد
وإذا كان $x, y \in Z$ بحيث يكون $x \cdot y = 0$ ، فإنه إما $x = 0$ أو $y = 0$.

مثال (4) :

لنكن الحلقة (Z_p, \oplus, \otimes) حيث P عدد أولي ، إن (Z_p, \oplus, \otimes) حلقة تامة .

البرهان :

برهننا سابقاً أن (Z_p, \oplus, \otimes) حلقة إبدالية واحدية ، ولنثبت أنها لا تحوي قواسم للصفر .

ليكن $[a], [b] \in Z_p$ ، حيث أن $[a] \otimes [b] = [0]$ أي أن $[a \cdot b] = [0]$ وهذا يعني
 $P/(a \cdot b)$ ، لكن P عدد أولي ، أي أن : P/a و P/b ، ومنه $[a] = [0]$ أو $[b] = [0]$.

مثال (5) :

إن حلقة المصفوفات المربعة $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ لا تشكل حلقة تامة لأنها حلقة ليست إبدالية .

مثال (6) :

حل المعادلة : $x^2 - 4x + 3 = 0$ في الحلقة $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$.

الحل :

لدينا

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$$

وبالتالي يكون $x = 3, x = 1$.

لكن في الحلقة $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$ ليست فقط العلاقة التالية صحيحة

$$\bar{0} \otimes \bar{a} = \bar{a} \otimes \bar{0} = \bar{0} \quad , \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_{12}$$

لأنه :

$$\begin{aligned} \bar{2} \otimes \bar{6} &= \bar{3} \otimes \bar{4} = \bar{3} \otimes \bar{8} = \bar{4} \otimes \bar{6} = \bar{4} \otimes \bar{9} = \bar{6} \otimes \bar{6} \\ &= \bar{6} \otimes \bar{8} = \bar{6} \otimes \bar{10} = \bar{9} \otimes \bar{8} = \bar{0} \end{aligned}$$

إذن يوجد للمعادلة المذكورة في الحلقة $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$ بالإضافة إلى الحلين $\bar{1}, \bar{3}$ حلان آخران وهما $\bar{9}, \bar{7}$ لأن :

$$\overline{(9-3)} \overline{(9-1)} = \bar{6} \otimes \bar{8} = \bar{0}$$

$$\overline{(7-3)} \overline{(7-1)} = \bar{4} \otimes \bar{6} = \bar{0}$$

المبرهنة التالية ، تبين لنا أن قانون الاختصار يتحقق في الحلقات التامة .

مبرهنة (3) :

لتكن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، عندئذٍ القضايا التالية متكافئة :

(1) الحلقة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ تامة .

(2) من أجل a, b, c من \mathbb{R} حيث $a \neq 0$ ، فإن :

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$$

البرهان :

(1) \Rightarrow (2) :

بما أن $a \cdot b = a \cdot c$ حيث $a, b, c \in R$ و $a \neq 0$ فإن $a(b - c) = 0$ وبما أن $a \neq 0$ ، فإن $b - c = 0$ ، أي أن $b = c$.

(2) \Rightarrow (1) :

نفرض جديلاً أنه يوجد قاسماً للصفر في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وليكن a ، عندئذٍ يوجد عنصر b من R مغاير للصفر ويحقق $a \cdot b = 0$ ، ومنه $a \cdot b = a \cdot 0$ ولكون $a \neq 0$ وحسب الفرض يكون $b = 0$ وهذا غير ممكن.

نستنتج مما سبق أن الحلقة $(R, +, \cdot)$ تامة لأنها لا تملك قواسم للصفر.

مثال (7) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة، وإذا كان y, x عنصرين ما من R بحيث $x^5 = y^5$ و $x^7 = y^7$. أثبت أن $x = y$.

الحل :

لنرمز لصفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 0 (العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع) إذا كان $x = 0$ ، فإن $x^5 = 0$ وبالتالي فإن $y^5 = 0$ ومنه $y = 0$.

لنفرض الآن أن $x \neq 0$ ، بما أن $x^7 = y^7$ ، فإن $x^5 \cdot x^2 = y^5 \cdot y^2$ ، وبالتالي فإن $x^5 \cdot x^2 = x^5 \cdot y^2$ ومنه يكون $x^5 \cdot (x^2 - y^2) = 0$.

بما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة و $x \neq 0$ ، فإن $x^5 \neq 0$ ، وبالتالي نرى من المعادلة السابقة أن $x^2 - y^2 = 0$ أي أن $x^2 = y^2$ ومنه (*) $x^6 = y^6$. وبما أن $x^7 = y^7$ فإن $x^6 \cdot x = y^6 \cdot y$ ، وبالتالي حسب (*) يكون $x^6 \cdot x = x^6 \cdot y$ أي أن $x^6 \cdot (x - y) = 0$. وبما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة و $x \neq 0$ فإن $x^6 \neq 0$ ، إذن $x - y = 0$ أي أن $x = y$.

نتيجة (4) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن $u \in R$ عنصراً معكوساً (له معكوس)،

عندئذ u ليس من قواسم الصفر .

لنتذكر أولاً مفهوم العنصر المعكوس : نقول عن العنصر $a \neq 0$ من الحلقة

$(R, +, \cdot)$ إنه معكوس إذا وُجد عنصر $c \in R$ و $0 \neq c$ ويحقق $a \cdot c = c \cdot a = 1$

نسمي عادةً العنصر c في هذه الحالة بمعكوس العنصر a في R .

لنبرهن الآن على صحة النتيجة :

لنتثبت أنه إذا كان $r \in R$ بحيث $u \cdot r = 0$ أو $r \cdot u = 0$ ، فإن $r = 0$.

لذلك إذا كان $u \cdot r = 0$ فإن :

$$u^{-1} \cdot (u \cdot r) = u^{-1} \cdot (0) = 0$$

$$u^{-1} \cdot (u \cdot r) = (u^{-1} \cdot u) \cdot r = 1 \cdot r = 0 \Rightarrow r = 0$$

كذلك إذا كان $r \cdot u = 0$ فإن :

$$(r \cdot u) \cdot u^{-1} = (0) \cdot u^{-1} = 0$$

لكن

$$(r \cdot u) \cdot u^{-1} = r (u u^{-1}) = r \cdot 1 = r = 0$$

(6-1) مميز حلقة (6-1) Characteristic of ring

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، إذا وجد عدد صحيح موجب وليكن n بحيث $n \cdot a = 0$

لكل $a \in R$ ، فإن أصغر عدد صحيح موجب يحقق هذه الخاصية يسمى مميز الحلقة . وإذا لم يوجد هذا العدد ، أي أن $n = 0$ هو العدد الصحيح الوحيد الذي

يحقق $n \cdot a = 0$ لكل $a \in R$ ، فإننا نقول إن الحلقة $(R, +, \cdot)$ مميزها الصفر .

نرمز عادةً لمميز الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالرمز $\text{Char}(R)$.

مثال (8) :

مميز الحلقات $(Z, +, \cdot)$ و $(Q, +, \cdot)$ و $(R, +, \cdot)$ و $(C, +, \cdot)$ هو الصفر دوماً ، بينما

مميز الحلقة (Z_n, \oplus, \otimes) يساوي n . كما أن مميز الحلقة $(Z_4 \times Z_6, \oplus, \otimes)$ هو 12

أي أن : $\text{Char}(Z_4 \times Z_6) = 12$.

مثال (9) :

ليكن النظام $(P(X), +, \cdot)$ حيث X مجموعة غير خالية ، و $A \cdot B = A \cap B$ و $A + B = A \Delta B$ ، عندئذٍ $(P(X), +, \cdot)$ حلقة إيدالية بمحايد ، والمجموعة ϕ هو محايدها بالنسبة لعملية الجمع والمجموعة X هو محايدها بالنسبة لعملية الضرب (تأكد من ذلك) ، المطلوب حدّد مميز هذه الحلقة.

الحل : بما أن

$$2A = A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \phi$$

لكل مجموعة $A \subseteq X$ ، فإن مميز الحلقة $(P(X), +, \cdot)$ يساوي 2 ونكتب $\text{Char}(P(X)) = 2$.

مبرهنة (4) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، عندئذٍ مميزها هو الصفر أو عدداً أولياً .

البرهان :

ليكن $\text{Char}(R) = n > 0$ ، ولنبرهن أولاً أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n \cdot 1 = 0$. بما أن $\text{Char}(R) = n$ ، فإن $n \cdot a = 0$ لكل $a \in R$ ، وبشكل خاص $n \cdot 1 = 0$ (أخذنا $a = 1$) .

لنفرض الآن أن $0 < m < n$ ، حيث $m \cdot 1 = 0$ ، عندئذٍ :

$$m \cdot a = m \cdot (1 \cdot a) = (m \cdot 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

وهذا تناقض ، و $\text{Char}(R) = m = n$.

لنفرض الآن أن n عدد غير أولي ، وبالتالي فإن $n = n_1 \cdot n_2$ حيث $n_1 < n$ و $n_2 < n$ ، عندئذٍ :

$$0 = n \cdot 1 = (n_1 \cdot n_2) \cdot 1 = (n_1 \cdot n_2) \cdot 1^2 = (n_1 \cdot 1) (n_2 \cdot 1)$$

وبما أن $(R, +, \cdot)$ لا تحوي قواسم للصفر ، فإن $n_1 \cdot 1 = 0$ أو $n_2 \cdot 1 = 0$ ، لكن $n_1 \cdot n_2 < n$ وهذا تناقض حيث n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n \cdot 1 = 0$ وبالتالي فإن $\text{Char}(R) = n$ ، يجب أن يكون عدداً أولياً .

(7-1) الحقل Field :

بدايةً نعرف الحقل المتخالف (Skew field) .

نقول إن الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ حلقة قاسمية (Division ring) أو حقل متخالف ، إذا كان كل عنصر غير صفري من R هو عنصر وحدة .

مثال (10) :

وجدنا سابقاً أن (Z_p, \oplus, \otimes) حلقة بمحايد حيث P عدد أولي . ولنبرهن أن (Z_p, \oplus, \otimes) حلقة قاسمية (حقل متخالف) .

الحل :

ليكن $[a] \in Z_p$ فإن $\gcd(a, p) = 1$ ، وهذا يعني أنه يوجد عدنان صحيحان $s, t \in Z$ بحيث يكون : $a \cdot s + p \cdot t = 1$ وبالتالي فإن :

$$[a] \otimes [s] \oplus [p] \otimes [t] = [1]$$

أي أن $[a] \otimes [s] = [1]$ وهذا يؤدي إلى أن $[s]$ هو معكوس $[a]$ الضربي، إذن (Z_p, \oplus, \otimes) حلقة قاسمية .

لنعرف الآن الحقل field :

تعريف : كل حلقة $(R, +, \cdot)$ تسمى حقلاً إذا حققت الشروط التالية :

- 1- يوجد في R عنصران على الأقل .
- 2- يوجد في R عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب (\cdot) .
- 3- لكل عنصر مختلف عن الصفر من R معكوس في R بالنسبة للعملية (\cdot) .

بمعنى آخر :

كل حلقة $(R, +, \cdot)$ تسمى حقلاً إذا كانت $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ زمرة ، حيث أن 0 صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ (المحايد بالنسبة لعملية الجمع $(+)$) . ونقول عن الحقل $(F, +, \cdot)$ إنه إبدالي إذا كانت العملية (\cdot) عملية إبدالية على عناصر F .

مثال (11) :

من الممكن التأكد أن $(R, +, \cdot)$ و $(Q, +, \cdot)$ و $(C, +, \cdot)$ هي حقول إبدالية ، لكن $(Z, +, \cdot)$ ليس حقلاً حيث أن $(+)$ و (\cdot) عمليتي الجمع والضرب العاديتين .

مثال (12) :

لتكن $F = \{a + b\sqrt{5} ; a, b \in Q\}$ أثبت أن $(F, +, \cdot)$ حقلاً حيث $(+)$ و (\cdot) هما عمليتا الجمع والضرب العاديتين .

إن $(F, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد صفرها هو 0 . (تأكد من ذلك) ولإثبات أن $(F, +, \cdot)$ حقل يجب أن نبرهن أن كل عنصر غير صفري هو عنصر وحدة . (حسب تعريف الحقل) .

لنفرض من أجل ذلك أن $a + b\sqrt{5}$ عنصر غير صفري في F ، وهذا يعني أن إما a أو b لا يساوي الصفر . كما أن :

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{5})^{-1} &= \frac{1}{a + b\sqrt{5}} = \frac{1}{a + b\sqrt{5}} \cdot \frac{a - b\sqrt{5}}{a - b\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{a^2 - 5b^2} - \frac{b}{a^2 - 5b^2} \sqrt{5} \end{aligned}$$

وبملاحظة أن $a^2 - 5b^2 \neq 0$ ، وإلا كان $\sqrt{5}$ عدداً كسرياً ، وبالتالي فإن :
 $a/(a^2 - 5b^2)$ و $-b/(a^2 - 5b^2)$ عددان كسريان ، وهذا يؤدي إلى أن المعكوس عنصر في F .

نتيجة (5) :

في كل حلقة $(F, +, \cdot)$ ، ومهما يكن $a \in F \setminus \{0\}$ ومهما يكن $b \in F$ ، فإن هناك عنصر وحيد وليكن x يحقق العلاقة $a \cdot x + b = 0$.

البرهان :

بما أن $(F, +)$ زمرة إبدالية ، فإن :

$$a \cdot x + b = 0 \Leftrightarrow a \cdot x = -b \Leftrightarrow x = a^{-1}(-b) = -a^{-1} \cdot b$$

(لأن a معكوس) . إذن $x = -a^{-1} \cdot b$.

وإذا كان الحقل إبدالياً ، فنكتب الناتج السابق بالشكل $x = -b/a$ ونكون بذلك قد عرفنا على $F \setminus \{0\}$ عملية نسميها عملية التقسيم وهي العملية المعاكسة للضرب .

ملاحظة (3) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة قاسمية إبدالية ، فإننا نقول أن $(R, +, \cdot)$ حقل .

مثال (13) :

وجدنا سابقاً أن (Z_p, \oplus, \otimes) حيث P عدد أولي ، حلقة قاسمية ، بما أن الضرب عملية إبدالية على عناصر Z_p ، فإن (Z_p, \oplus, \otimes) حقل .

ملاحظة (4) :

إن أي حقل يجب أن يكون حلقة تامة لأن كل عنصر غير صفري منها هو عنصر وحدة (محايد) ولذا ليس قاسماً للصفر . لكن عكس هذه الحقيقة ليس صحيحاً ، فعلى سبيل المثال حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ هي حلقة تامة لكنها لا تشكل حقلاً . والمبرهنة التالية تقدم لنا في أي حالة يكون العكس صحيحاً .

مبرهنة (5) :

كل حلقة تامة منتهية ولتكن $(R, +, \cdot)$ هي حقل .

البرهان :

لتكن a_1, a_2, \dots, a_n عناصر الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن a عنصراً غير صفري في R . إذا كان $a a_i = a a_j$ حيث $i, j = 1, 2, \dots, n$ ، فإن $a(a_i - a_j) = 0$ ، وبما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، فإن $a_i = a_j$ حيث $i, j = 1, 2, \dots, n$. لذلك فإن العناصر $a a_1, a a_2, \dots, a a_n$ هي جميع عناصر الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبالتالي نستطيع أن نكتب كل عنصر في R بالشكل $a a_i$ حيث $1 \leq i \leq n$.

وبما أن $1 \in R$ ، لذلك فإن $1 = a a_i$ حيث $1 \leq i \leq n$ وبما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فإن $1 = a_i a = a a_i$ ، وهذا يؤدي إلى أن معكوس a هو a_i . أي أن كل عنصر غير صفري في R له معكوس . إذاً $(R, +, \cdot)$ حقل .

المبرهنة التالية تعطي الشرط اللازم والكافي لكي تكون حلقة الأعداد الصحيحة ،

قياس n ، حقلاً .

مبرهنة (6) :

حلقة الأعداد الصحيحة قياس n (Z_n, \oplus, \otimes) تكون حقلاً ، إذا وفقط إذا كان n عدداً أولياً .

البرهان :

لنفرض أولاً ، أن n أولي ، ولنبرهن أن (Z_n, \oplus, \otimes) حقل .

ليكن $[a] \in Z_n$ ، $[a] \neq [0]$ أي أن $a \in Z$ بحيث $0 < a < n$. وبما أن $\gcd(a, n) = 1$ ، يوجد عدنان صحيحان r, q بحيث يكون $1 = aq + rn$ ، وبملاحظة أن :

$$[a] \otimes [q] = [a \cdot q] \oplus [0] = [a \cdot q] \oplus [n \cdot r] = [aq + nr] = [1]$$

وهذا يبين لنا أن العنصر $[q]$ هو معكوس العنصر $[a]$ من Z_n إذن (Z_n, \oplus, \otimes) حقل .

لنبرهن العكس :

لنفرض أنه إذا كان n عدد غير أولي (عدد مؤلف) فإن (Z_n, \oplus, \otimes) ليست حقلاً .
بما أننا فرضنا أن n غير أولي ، فإن $n = a \cdot b$ حيث $0 < a, b < n$ لذلك فإن :

$$[a] \otimes [b] = [a \cdot b] = [n] = [0]$$

وبما أن $[a]$ و $[b]$ عنصرين غير صفريين في Z_n ، إذن $[a]$ و $[b]$ قاسمين للصفر في Z_n ، وهذا يعني أن (Z_n, \oplus, \otimes) ليست حلقة تامة . وبالتالي ليست حقلاً .

ملاحظة (5) :

كان بالإمكان برهان أن (Z_n, \oplus, \otimes) حقل (في المبرهنة السابقة) ، علماً أن n عدد أولي . وذلك بالاستفادة من المثال (13) .

ملاحظة (6) :

من المبرهنة (4) إن مميز أي حقل هو إما الصفر أو عدداً أولياً .

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، ولنرمز لمحايدته بالنسبة لعملية الجمع بـ 0 ، ولمحايدته بالنسبة لعملية الضرب بـ e ، وإذا كان للحقل $(F, +, \cdot)$ مميز هو p ، فإن :

$$p \cdot e = o \quad (1)$$

$$1 \cdot e = e \neq 0 \quad \text{لأن } p > 1 \quad (2)$$

(3) p أولي لأنه إذا كان b, a عددين صحيحين موجبين بحيث يكون $p = a \cdot b$ ، فإن $p = a \cdot b$ ، فإن $o = (a \cdot e) \cdot (b \cdot e)$ ، وبالتالي فإنه إما أن يكون $a \cdot e = o$ أو أن يكون $b \cdot e = o$ ، أي أن يكون $a = p$ أو $b = p$.

تعريف العنصر معدوم (المتلاشي) القوي في حلقة (Nilpotent element) :

نقول إن العنصر $a \in R$ ، حيث $(R, +, \cdot)$ حلقة ما معدوم القوي (nilpotent) إذا وُجد عدد صحيح موجب وليكن n بحيث $a^n = o$.

مثال (14) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة، إن صفرها هو عنصر متلاشي، ولأن $o^n = n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^n$.

كما أن العنصران $2, 4$ متلاشيان في الحلقة $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ ، لأن $2^3 = o$ ، $4^2 = 16 = o$ ، حيث $2, 3 \in \mathbb{Z}^+$.

تعريف العنصر متساوي القوي في حلقة (Idempotent element) :

نقول إن العنصر $a \in R$ ، حيث $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، عنصر متساوي القوي idempotent، إذا كان $a^2 = a$.

مثال (15) :

في الحلقة $(R, +, \cdot)$ العنصران $0, 1$ متساويا القوي فيها، لأن $o^2 = o$ و $1^2 = 1$ كما أن العنصران $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ متساويا القوي في الحلقة $(R \times R, +, \cdot)$ ، لأن :

$$(1, 0)^2 = (1, 0) \quad , \quad (0, 1)^2 = (0, 1)$$

وفي الحلقة $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ العنصران $3, 4$ متساويا القوي لأن $3^2 = 3$ و $4^2 = 4$.

نقول إن العنصر a في الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ أحادي القدرة unipotent إذا وفقط إذا كان $1 - a$ عنصر معدوم القوي.

لنعرف الآن حلقة بول Boolean ring (جورج بول (1815-1864)) :

نسمي الحلقة $(R, +, \cdot)$ حلقة بول ، إذا كان كل عنصر فيها متساوي القوي ، أي لكل $a \in R$ ، فإن $a^2 = a$.

مبرهنة (7) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بول ، عندئذٍ $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية .

البرهان :

ليكن $a \in R$ ، فإن $a + a \in R$ ، وبالتالي ، $(a + a)^2 = a + a$ لأن $(R, +, \cdot)$ حلقة بول . لكن :

$$(a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$

$$a + a = a + a + a + a$$

إذن :

ومنه $a + a = 0$ ، إذن $a = -a$ ، لكل $a \in R$.

الآن من أجل $a, b \in R$ ، نجد أن :

$$(a + b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a + ab + ba + b$$

وبالتالي ، فإن $ab + ba = 0$ ، وعليه فإن $ab = -ba$ ولكن $ab = ba$ كما تمّ

إثباته في البداية، إذن $ab = ba$ ، فالحلقة $(R, +, \cdot)$ إبدالية .

الفصل الثاني

الحلقات والحقول الجزئية والمثاليات

*Subring and subfields
& Ideals*

الفصل الثاني

الحلقات والحقول الجزئية والمثاليات

Subring and subfields & Ideals

(1-2) الحلقة الجزئية subring :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من R . إذا كانت S حلقة بالنسبة للعمليات $(+)$ و (\cdot) على S ، فإننا نقول إن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ونرمز لذلك بالشكل : $S \leq R$

إذا كانت $S \leq R$ و $S \neq R$ ، فإننا نقول أن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية فعلية (Proper subring) من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ونرمز لذلك بـ $S < R$.

نعلم من نظرية الزمر ، أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة جزئية غير خالية ولتكن H زمرة جزئية (Subgroup) من الزمرة (G, \star) هو أن يكون $y^{-1} \cdot x \in H$ لكل $x, y \in H$. سنستخدم هذا المفهوم في الحلقات الجزئية من خلال المبرهنة التالية :

مبرهنة (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت $\phi \neq S \subseteq R$ ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ هو أن يكون :

$$x \cdot y \in S \quad , \quad x - y \in S$$

وذلك من أجل أي $x, y \in S$.

البرهان :

نفرض أولاً أن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبالتالي فإن $(S, +, \cdot)$ زمرة جزئية من R بالنسبة لعملية الجمع، وبالتالي يكون $x - y \in S$ لكل $x, y \in S$ من

S ، وبما أن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ فإن $x \cdot y \in S$ لكل $x, y \in S$ من S نفرض الآن العكس ، أي لنفرض أن $x - y \in S$ و $x \cdot y \in S$ لكل $x, y \in S$ من S ، وهذا يعني أن S زمرة جزئية بالنسبة لعملية الجمع في R ، وبما أن الخاصة الإبدالية صحيحة بالنسبة لعملية الجمع على R فهي صحيحة أيضاً على S ، إذن S زمرة جزئية إبدالية . وبما أن عمليتي التجميعية وعملية توزيع الضرب على الجمع صحيحتان على R فهما صحيحتان على S لكون S مجموعة جزئية من R ، إذن $S \leq R$.

(2-2) أمثلة :

1- إن $\{0\}$ و R حلقتين جزئيتين بالنسبة لأي حلقة R ، تسمى عادةً الحلقة $(\{0\}, +, \cdot)$ حلقة جزئية مبتذلة Trivial subring .

2- إن المجموعة $\{0, 2, 4\}$ تشكل حلقة جزئية بالنسبة للحقل $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$.

3- إن حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من حلقة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

4- من أجل كل عدد صحيح موجب n ، المجموعة التالية :

$$n \cdot \mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$$

هي حلقة جزئية من حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

5- إن مجموعة الأعداد المركبة التالية : $Z[i] = \{a + i b ; a, b \in \mathbb{Z}\}$ تشكل حلقة جزئية من حلقة الأعداد المركبة $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

الحل :

من الواضح أولاً أن $\phi \neq Z[i] \subseteq \mathbb{C}$. ليكن $x, y \in Z[i]$ فإن $x = a_1 + i b_1$ و $y = a_2 + i b_2$ حيث $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$

$$x - y = (a_1 + i b_1) - (a_2 + i b_2) = (a_1 - a_2) + i (b_1 - b_2) \quad (1)$$

بما أن $a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$ ، فإن $x - y \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot y = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i (a_2 b_1 + a_1 b_2) \quad (2)$$

وبما أن $a_1 a_2 - b_1 b_2$ و $a_2 b_1 + a_1 b_2$ من Z ، فإن $x \cdot y \in Z$

$$S = \{a + b\sqrt{5} ; a, b \in Z\} \quad : \text{6- لتكن المجموعة } S \text{ التالية :}$$

إن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Z, +, \cdot)$.

الحل :

من الواضح أن $\phi \neq S \subseteq Z$. ليكن y, x عنصرين ما من S ، وهذا يعني أن :

$$: \quad y = c + d\sqrt{5} , \quad x = a + b\sqrt{5} \quad \text{حيث } a, b, c, d \in Z . \text{ عندئذ يتحقق ما يلي :}$$

$$x - y = (a + b\sqrt{5}) - (c + d\sqrt{5}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{5} \quad (1)$$

وبما أن $a - c$ و $b - d$ من Z ، فإن $x - y \in S$.

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{5}) \cdot (c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + (bc + ad)\sqrt{5} \quad (2)$$

وبما أن $a \cdot c + 5bd$ و $bc + ad$ من Z ، فإن $x \cdot y \in S$.

نستنتج مما سبق أن $(S = Z[\sqrt{5}], +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(Z, +, \cdot)$.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in R \right\} \quad \text{7- لتكن } (R, +, \cdot) \text{ حلقة ما، ولتكن}$$

إن $(M, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(M_2(R), +, \cdot)$. (تسمى هذه بحلقة

المصفوفات المثلثية العليا على R) Upper triangular matrices over R .

الحل :

$$\text{من الواضح أن } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ من } M \text{ ، إذن } M \neq \phi .$$

$$\text{لتكن } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \text{ ، حيث } a, b, c, p, q, r \in R \text{ ، فإن :}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ 0 & c-r \end{pmatrix} \in M$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq+br \\ 0 & cr \end{pmatrix} \in M$$

ملاحظات :

(1) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وليكن 1 العنصر المحايد (عنصر الوحدة) فيها ، وإذا كانت $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث يكون $1 \in S$ ، فإن الحلقة الجزئية $(S, +, \cdot)$ بمحايد أيضاً والعنصر المحايد فيها هو 1 .

(2) إذا كانت $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ فإنه من الممكن أن تكون :

- الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد، في حين أن الحلقة الجزئية $(S, +, \cdot)$ لا تكون بمحايد.
 - الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد ، والحلقة الجزئية $(S, +, \cdot)$ بمحايد أيضاً ، إلا أن العنصر المحايد في R بالنسبة للعملية (\cdot) لا ينتمي إلى S .

- الحلقة الجزئية $(S, +, \cdot)$ بمحايد، في حين أن الحلقة $(R, +, \cdot)$ لا تكون بمحايد.

مثال (7) :

من المعلوم أن حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ بمحايد وعنصر المحايد فيها هو العدد 1 ، علماً أن $(+)$ و (\cdot) هما عمليتا الجمع والضرب العاديتان ، ولتكن $S = \{2a : a \in Z\}$ ، إن $(S, +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، ولا يوجد فيها عنصر محايد بالنسبة للعملية (\cdot) لأن $1 \notin 2a$ لكل $a \in Z$.

مثال (8) :

هات مثالاً يوضح فيه أن المحايد في حلقة جزئية يختلف عن المحايد في الحلقة الأصلية .

الحل :

لنأخذ الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$ والحلقة الجزئية منها التالية :

$$(S, +, \cdot) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in (Z, +, \cdot) \right\}$$

إن الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$ بمحايد ، حيث أن $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو المحايد فيها . إن الحلقة

$(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$ ومحايدها هو $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، وإن

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تعريف مركز حلقة Center of ring

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن $\{ a \in R : a \cdot x = x \cdot a ; \forall x \in R \}$

إن $(C(R), +, \cdot)$ حلقة ، تسمى بمركز الحلقة $(R, +, \cdot)$.

المبرهنة التالية تبين لنا أن $(C(R), +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

مبرهنة (2) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ، فإن $(C(R), +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

1- إن $C(R) \subseteq R$ ، لأن $C(R)$ من جهة أولى ، مجموعة جزئية من R

من جهة ثانية، إذا رمزنا لصفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالرمز 0 ، فإن :

$$0 \cdot x = x \cdot 0 ; \forall x \in R \text{ ، ومنه } 0 \in C(R) \text{ ، إذن } C(R) \neq \emptyset$$

2- إذا كان a_2, a_1 عنصرين ما من $C(R)$ ، فإن :

$$a_1 \cdot x = x \cdot a_1 \text{ \& } a_2 \cdot x = x \cdot a_2$$

وذلك من أجل أي x من R ، ومن ثم فإن :

$$(a_1 - a_2) \cdot x = a_1 \cdot x - a_2 \cdot x = x \cdot a_1 - x \cdot a_2 = x (a_1 - a_2)$$

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot x = a_1 \cdot (a_2 \cdot x) = a_1 \cdot (x \cdot a_2) = (a_1 \cdot x) \cdot a_2$$

$$= (x \cdot a_1) \cdot a_2 = x \cdot (a_1 \cdot a_2)$$

وذلك من أجل أي x من R ، ومنه يكون :

$$a_1 \cdot a_2 \in C(R) \text{ \& } a_1 - a_2 \in C(R)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $(C(R), +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.
مثال (9) :

لتكن $(M_2(R), +, \cdot)$ حلقة ، أوجد $C(M_2(R))$.
الحل :

حسب تعريف مركز حلقة ، نرى أن :

$$C(M_2(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \in C(R) \right\}$$

حيث $(R, +, \cdot)$ حلقة ما .

(3-2) بعض العمليات على الحلقات الجزئية :

المبرهنتان التاليتان توضحان أن تقاطع حلقتين جزئيتان من حلقة ما هو حلقة جزئية ، بينما اتحاد حلقتين جزئيتين ليس من الضروري أن يكون حلقة جزئية .
مبرهنة (3) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، إذا كانت $\{(S_i, +, \cdot)\}_{i \in I}$ أسرة غير خالية من الحلقات الجزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذ $\left(\bigcap_{i \in I} S_i, +, \cdot\right)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.
البرهان :

لنرمز لمحايد الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالرمز 0 ، بما أن $\{(S_i, +, \cdot)\}_{i \in I}$ أسرة حلقات جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن $0 \in S_i$ لكل i من I ، ومن ثم فإن $0 \in \bigcap_{i \in I} S_i$.
وهذا يبين لنا أن $\phi \neq \bigcap_{i \in I} S_i \subseteq R$.

ليكن x, y عنصرين ما من $\bigcap_{i \in I} S_i$ ، فإن $x, y \in S_i$ لكل i من I ، وبالتالي فإن :
• $x - y \in \bigcap_{i \in I} S_i$ ومنه $x - y \in S_i; \forall i \in I$

وبنفس الطريقة نرى أنه إذا كان $x, y \in S_i$ لكل i من I وبالتالي فإن $x \cdot y \in \bigcap_{i \in I} S_i$

لكل i من I .

نستنتج مما سبق أن $\left(\bigcap_{i \in I} S_i, +, \cdot\right)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

ملاحظة (1) :

إن اتحاد حلقتين جزئيتين من حلقة ليس بالضرورة أن يكون حلقة جزئية من الحلقة المدروسة، والمثال التالي يوضح هذه الملاحظة .

مثال (10) :

لتكن حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ ، ولتكن الحلقتان الجزئيتان من الحلقة $(Z, +, \cdot)$: $S = (2Z, +, \cdot)$ و $T = (3Z, +, \cdot)$.
 يبين أن $S \cup T$ ليس حلقة جزئية من الحلقة $(Z, +, \cdot)$.

الحل :

من الواضح أن : $2 \in S \cup T$ ، وكذلك $3 \in S \cup T$ ، بينما $2+3 = 5 \notin S \cup T$ ، أي أن $S \cup T$ ليست مغلقة بالنسبة لعملية الجمع فهي ليست حلقة جزئية من الحلقة $(Z, +, \cdot)$.

مُبرهنة (4) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وكانت $(S, +, \cdot)$ و $(T, +, \cdot)$ حلقتين جزئيتين منها ، فإن $(S \cup T, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ إذا وفقط إذا كانت $S \subseteq T$ أو $T \subseteq S$.

البرهان :

لنفرض أولاً أن $S \subseteq T$ أو $T \subseteq S$ ، ولنبرهن أن $(S \cup T, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

إذا كان $S \subseteq T$ أو $T \subseteq S$ ، فإن $S \cup T = T$ أو $S \cup T = S$ على التوالي ، إذن $(S \cup T, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنثبت الآن العكس : أي لنفرض أن $S \cup T$ حلقة جزئية من $(R, +, \cdot)$ ولنبرهن أن

$$. T \subseteq S \text{ أو } S \subseteq T$$

لنفرض أن $SUT \subseteq R$ ، وأن $T \not\subseteq S$ و $S \not\subseteq T$ ، عندئذ يوجد $a \in S$ و $a \notin T$ ، ويوجد $b \in T$ و $b \notin S$ ، وعليه فإن $a, b \in SUT$ ، لكن $(SUT, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ فرضاً إذن $a - b \in SUT$ ، لكن $a - b \notin S$ ، لأنه لو كان $a - b \in S$ فإن $a \in S$ ، وهذا يناقض كون $b \notin S$ ، كما أن $a - b \notin T$ ، لأنه لو كان $a - b \in T$ ، فإن $a \in T$ ، وهذا تناقض أيضاً .

إذن $a - b \notin SUT$ وهذا تناقض كون $(SUT, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذن $S \subseteq T$ أو $T \subseteq S$.

(4-2) الحقول الجزئية Subfield :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وإذا كانت K مجموعة جزئية غير خالية من F . نقول إن K حقل جزئي Subfield من الحقل $(F, +, \cdot)$ إذا كان $(K, +, \cdot)$ حقلاً ، حيث أن عمليتي الجمع (+) والضرب (·) هما عمليتا الحقل $(F, +, \cdot)$.
ينتج من التعريف السابق أن لكل حقل يوجد له حقل جزئي مبتدل هو الحقل نفسه .

تعريف الحقل الأولي (Prime field) :

الحقل الذي لا يحوي حقولاً جزئية فعلية يدعى حقلاً أولياً .

المبرهنة التالية تقدم الشرط اللازم والكافي لكي يكون الحقل $(K, +, \cdot)$ حقلاً جزئياً من الحقل $(F, +, \cdot)$.

مبرهنة (4) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، ولتكن K مجموعة جزئية تحوي عنصرين على الأقل من F . إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون $(K, +, \cdot)$ حقلاً جزئياً من الحقل $(F, +, \cdot)$ هو أن يتحقق الشرطان التاليان :

$$(1) \text{ إذا كان } y, x \text{ عنصرين ما من } K \text{ ، فإن } x - y \in K$$

$$(2) \text{ إذا كان } y, x \text{ عنصرين ما من } K \text{ ، وإذا كان } y \neq 0 \text{ فإن } y^{-1} \in K \text{ . حيث}$$

0 هو صفر الحقل $(F, +, \cdot)$.

مثال (11):

أثبت أن حقل الأعداد النسبية $(Q, +, \cdot)$ يشكل حقلاً أولياً.

(5-2) أمثلة:

1- بيّن في الفصل السابق أن كلاً من $(Q, +, \cdot)$ و $(R, +, \cdot)$ و $(C, +, \cdot)$ حقول. فمن الواضح أن $(Q, +, \cdot)$ هو حقل جزئي من الحقل $(R, +, \cdot)$ ، كما أن $(R, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(C, +, \cdot)$.

2- لتكن $S = \{a + b\sqrt{5} ; a, b \in Q\}$ ، ولنثبت أن S هي حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية بالنسبة للعمليات المألوفتين الجمع والضرب.

الحل:

1- من الواضح أن S تحوي عنصرين على الأقل من R وهما 0 و 1، لأن

$$0 = 0 + 0\sqrt{5} \quad \text{و} \quad 1 = 1 + 0\sqrt{5}$$

2- ليكن $x = a + b\sqrt{5}$ و $y = c + d\sqrt{5}$ عنصرين ما من S ، حيث أن $a, b, c, d \in Q$ ، فإن:

$$x - y = (a + b\sqrt{5}) - (c + d\sqrt{5}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{5} \in S$$

3- ليكن $x = a + b\sqrt{5}$ و $y = c + d\sqrt{5}$ عنصرين ما من S بحيث أن $y \neq 0$ و $a, b, c, d \in Q$ ، بما أن $c + d\sqrt{5} \neq 0$ ، فإن: $c^2 - 5d^2 \neq 0$ و $c - d\sqrt{5} \neq 0$ ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} x \cdot y^{-1} &= \frac{x}{y} = \frac{a + b\sqrt{5}}{c + d\sqrt{5}} = \frac{(a + b\sqrt{5})(c - d\sqrt{5})}{c^2 - 5d^2} \\ &= \frac{ac - 5bd}{c^2 - 5d^2} + \frac{(cb - ad)\sqrt{5}}{c^2 - 5d^2} \in S \end{aligned}$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(S, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(R, +, \cdot)$.
نقدم الآن بعض خواص الحقول الجزئية من خلال المبرهنات التالية:

مبرهنة (5) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما، إذا كانت $\{(K_i, +, \cdot)\}_{i \in I}$ أسرة غير خالية من الحقول الجزئية من الحقل $(F, +, \cdot)$ ، عندئذٍ $(F, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\bigcap_{i \in I} K_i, +, \cdot)$.

البرهان :

لنرمز لصفر الحقل $(F, +, \cdot)$ بـ 0 ولمحايدته بـ 1 . وبما أن $\{(K_i, +, \cdot)\}_{i \in I}$ أسرة حقول جزئية من الحقل $(F, +, \cdot)$ ، فإن من أجل كل i من I يكون $0, 1 \in K_i$ وبالتالي فإن $0, 1 \in \bigcap_{i \in I} K_i$ إذن يوجد في $\bigcap_{i \in I} K_i$ عنصران على الأقل.

لنتحقق الآن من الشرطين الواردين في المبرهنة السابقة.

ليكن y, x عنصرين ما من $\bigcap_{i \in I} K_i$ ، فإن y, x من K_i لكل i من I ، وبالتالي فإن

$$x - y \in K_i \text{ لكل } i \in I, \text{ أي أن } x - y \in \bigcap_{i \in I} K_i.$$

إذا كان y, x عنصرين ما من $\bigcap_{i \in I} K_i$ وإذا كان $y \neq 0$ فإن $x - y \in K_i$ و $y \neq 0$

لكل i من I . ومن ثم فإن $x \cdot y^{-1} \in K_i$ لكل i من I ومنه يكون $x \cdot y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} K_i$.

نستنتج مما سبق أن $(\bigcap_{i \in I} K_i, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(F, +, \cdot)$.

مبرهنة (6) :

إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً إبدالياً ما، ولنرمز لصفره بـ 0 ، ولتكن K مجموعة جزئية غير خالية من F ، إذا كانت $(K, +, \cdot)$ حلقة تامة. وإذا كانت

$$S = \{a \cdot b^{-1} : a, b \in K, b \neq 0\}$$

يحتوي K وهو أصغر حقل جزئي من الحقل $(F, +, \cdot)$ يحتوي K .

البرهان :

لنرمز للعنصر المحايد في الحقل $(F, +, \cdot)$ بـ 1 .

إن S تحوي عنصرين على الأقل لأن $0, 1 \in S$. لنتحقق الآن من شرطي الحقل الجزئي .

ليكن x, y عنصرين ما من S ، أي أن $x = a.b^{-1}$, $y = c.d^{-1}$ حيث أن :
 $a, b, c, d \in K$, $d \neq 0$, $b \neq 0$ ، وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} x - y &= a.b^{-1} - c.d^{-1} \\ &= a.(d.d^{-1}).b^{-1} - c.(b.b^{-1}).d^{-1} \\ &= (a.d) (b.d)^{-1} - (c.b) (b.d)^{-1} \\ &= (a.d - c.b) (b.d)^{-1} \end{aligned}$$

وبما أن $a, b, c, d \in K$, $d \neq 0$, $b \neq 0$ فإن $a.d - c.b$ و $bd \in K$, $b.d \neq 0$ ومنه يكون $(a.d - c.b) (b.d)^{-1} \in S$ ، أي أن $x - y \in S$.

لنبرهن الآن على صحة الشرط الآخر الوارد في المبرهنة قبل الأخيرة .
 بالاستفادة مما سبق ، بما أن :

$$x = a.b^{-1} , y = c.d^{-1} ; a, b, c, d \in K , b \neq 0 , d \neq 0$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} x.y^{-1} &= (a.b^{-1}) (c.d^{-1})^{-1} = (a.b^{-1}) (d.c^{-1}) \\ &= (a.d) (b^{-1}.c^{-1}) = (a.d) (c.b)^{-1} \end{aligned}$$

وبما أن :

$$c \neq 0 , b \neq 0 ; a, b, c, d \in K , d \neq 0$$

فإن :

$$a.d , c.b \in K , c.b \neq 0$$

ومن ثم فإن $(a.d) (c.b)^{-1} \in S$ أي أن $x.y^{-1} \in S$.

مما سبق نستنتج أن $(S, +, \cdot)$ حقلاً جزئياً من الحقل $(F, +, \cdot)$.

إذا كان a عنصراً ما من K ، فإن :

$$a = a.1 = a.1^{-1} \in S$$

وهذا يبين لنا أن الحقل الجزئي $(S, +, \cdot)$ يحوي K .

لنبرهن أخيراً أن $(S, +, \cdot)$ هو أصغر حقل جزئي من الحقل $(F, +, \cdot)$.

ليكن $(S_1, +, \cdot)$ حقلاً جزئياً ما من الحقل $(F, +, \cdot)$ يحوي K . إن $S_1 \subseteq S$ لأنه إذا كان x عنصراً ما من S ، فإنه بالإمكان كتابته بالشكل: $x = a \cdot b^{-1}$ حيث أن $a, b \in K$ و $b \neq 0$ ، لكن:

$$a, b \in K, b \neq 0 \Rightarrow a, b \in S_1, b \neq 0$$

أي أن: $a \cdot b^{-1} \in S_1$ أي أن $x \in S_1$.

(6-2) المثاليات Ideals :

يعود سبب اكتشاف المثاليات إلى المحاولات العديدة التي قام بها العديد من الرياضيين لإثبات نظرية فيرما الأخيرة. ويعود الفضل أخيراً إلى الرياضي الألماني كومر Kummer (1810-1893) في تقديم مفهوم المثالية Ideal وكان ذلك عام 1847. ثم توسع هذا المفهوم من قبل الرياضي الألماني الآخر وديكند Dedekind في عام 1871 وعرفها تعريفاً دقيقاً.

تعد المثاليات من أهم الحلقات الجزئية من حلقة ما، وتلعب في الحلقات الدور الذي تلعبه الزمر الجزئية الناظرية في نظرية الزمر.

تعريف المثالية :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وإذا كانت I مجموعة جزئية غير خالية من R :

1- نقول عن المجموعة I إنها تشكل مثالية يسارية (Left ideal) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ إذا تحقق ما يلي :

$$(1) (I, +) \text{ زمرة جزئية من الزمرة } (R, +) .$$

$$(2) \text{ لكل } r \in R \text{ فإن } r \cdot I \subseteq I .$$

2- نقول عن المجموعة I إنها تشكل مثالية يمينية (Right ideal) في الحلقة

$(R, +, \cdot)$ إذا حققت ما يلي :

(1) زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$.

(2) لكل $r \in R$ فإن $I \cdot r \subseteq I$.

3- نقول عن المجموعة I إنها تشكل مثالية (Ideal) (ثنائية الجانب) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ إذا كانت مثالية يسارية ويمينية في آن واحد .

لنورد الآن شرط مكافئ للتعريف السابق من خلال التمهيدية التالية :

تمهيدية (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، و I مجموعة جزئية وغير خالية من R فإن :

1- الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة I مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هو أن يتحقق ما يلي :

(a) لكل $a, b \in I$ ، فإن $a - b \in I$.

(b) لكل $a \in I$ و $r \in R$ ، فإن $r \cdot a \in I$.

2- الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة I مثالية يمينية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هو أن يتحقق ما يلي :

(a) لكل $a, b \in I$ فإن $a - b \in I$

(b) لكل $a \in I$ ، ولكل $r \in R$ ، فإن $a \cdot r \in I$.

3- الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة I مثالية (ثنائية الجانب) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هو أن يتحقق ما يلي :

(a) لكل $a, b \in I$ فإن $a - b \in I$

(b) لكل $a \in I$ و $r_1, r_2 \in R$ فإن $r_1 \cdot a \cdot r_2 \in I$

البرهان :

لنبرهن على (1) وبالطريقة نفسها يمكن البرهان على (2) و (3) .

لزوم الشرط :

لنفرض أولاً أن I مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$. بما أن زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$ ، فإنه من أجل أي $a, b \in I$ يكون $a - b \in I$ ، ومن ناحية ثانية ، مهما يكن $r \in R$ و $a \in I$ فإن $r \cdot a \in I$:

كفاية الشرط :

بما أنه لكل b, a من I يتحقق $a - b \in I$ ، وهذا يبين أن زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$. ليكن $r \in R$ ولكل $a \in I$ فإن $r \cdot a \in I$ ومنه يكون $r \cdot I \subseteq I$ من التعريف والتمهيدية السابقتين ، نلاحظ ما يلي :

(1) إذا كانت I مثالية يسارية أو (يمينية) من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن I حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$. إلا أنه إذا كانت $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فليس ضرورياً أن تكون $(S, +, \cdot)$ مثالية يسارية أو (يمينية) في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

فيما يلي ستستخدم كلمة مثالية للدلالة على المثالية ثنائية الجانب .

(2) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، فإن أي مثالية يسارية هي مثالية يمينية والعكس صحيح ، لذلك ، فإنه في الحلقة الإبدالية أي مثالية يسارية أو يمينية هي مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(3) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولنرمز لصفها بـ 0 (محايدتها بالنسبة للجمع) إذا كانت $\{0\} \neq R$ ، فإن الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي مثاليين على الأقل وهما $\{0\}$ و R . كل مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تختلف عن المثاليين R و $\{0\}$ تسمى مثالية غير تافهة (مبتذلة) (trivial ideal) في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

كل حلقة لا تحتوي على أية مثالية غير مبتذلة تسمى بالحلقة البسيطة .

(4) نقول إن المثالية I هي مثالية فعلية (Proper ideal) من حلقة ما $(R, +, \cdot)$ إذا كانت $I \neq R$.

نتيجة (1) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، عندئذٍ F لا يحوي سوى مثاليين فقط وهما $F, \{0\}$.

البرهان :

لتكن I مثالية في الحقل $(F, +, \cdot)$. إذا كانت $I = 0$ ، فإنه يتم المطلوب ، أما إذا لم يكن $I \neq 0$ عندئذٍ يوجد في I عنصراً ما وليكن $a \neq 0$. وبما أن للعنصر a معكوس (لأنه عنصر غير صفري من الحقل $(F, +, \cdot)$) فإنه $I = F$.

(7-2) أمثلة :

1- لتكن حلقة المصفوفات الحقيقية من الدرجة الثانية $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

إن المجموعة $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ هي مثالية يسارية ولكنها ليست مثالية

يمينية في الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

الحل :

نلاحظ أولاً أن $\phi \neq I \subseteq M_2(\mathbb{R})$ لأن $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$.

لتكن $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ عنصرين ما من I ، وإذا كانت $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ فإن :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{pmatrix} \in I \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & 0 \\ az+bw & 0 \end{pmatrix} \in I \quad (2)$$

إن ، من (1) و(2) ، نجد أن I مثالية يسارية . لنثبت الآن أن I ليست مثالية

يمينية ، من أجل ذلك إن $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in I$ و $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

لكن $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin I$ وبالتالي فإن I ليست مثالية

يمينية في الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2- لتكن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حلقة جميع التطبيقات المتصلة على \mathbb{R} ، أثبت أن المجموعة :

$$I = \{g \in \mathbb{R} : g(3) = 0\}$$

الحل :

إن الحلقة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ إبدالية (لأن عملية الجمع والضرب في التطبيقات إبدالية).

بما أن التطبيق الصفري ينتمي إلى I ، فإن $I \neq \emptyset$ إذن $I \subseteq \mathbb{R}$ فإن $I \neq \emptyset$.

ليكن $f, g \in I$ وإذا كان h من \mathbb{R} ، فإن :

$$(f - g)(3) = f(3) - g(3) = 0 - 0 = 0$$

$$(h \cdot f)(3) = h(3) \cdot f(3) = h(3) \cdot 0 = 0$$

إذن $f - g \in I$ و $f \cdot g \in I$ ، وبالتالي فإن I مثالية من حلقة التطبيقات المتصلة الإبدالية $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3- لتكن الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، بيّن فيما إذا كانت الحلقة الجزئية $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ من الحلقة

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ هي مثالية.

الحل :

إن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ليست مثالية لأنه على سبيل المثال : إذا كان $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ و $7 \in \mathbb{Z}$ فإن

$$(7) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$$

محقق . إذن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ليست مثالية من الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

قبل أن نقدم بعض العمليات على المثاليات ، نقدم المبرهنة الهامة التامة .

مبرهنة (7) :

إذا كانت $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد مثالياتها ، فقط المثاليان التافهان فإن

$(R, +, \cdot)$ حقل .

البرهان :

نفرض أن الحلقة $(R, +, \cdot)$ لا تحتوي على مثاليات غير مبتذلة ، وليكن $a \in R \setminus \{0\}$ ، وهذا يعني أن $\langle a \rangle \neq \{0\}$ ومن ثم فإن $\langle a \rangle = R$ وبالتالي فإن :

$$1 \in \langle a \rangle = \{ r.a : r \in R \}$$

إذن يوجد عنصر من R وليكن t بحيث يكون $1 = t.a$. وبسبب كون $(R, +, \cdot)$ إبدالية فإن $a.t = 1$ ، أي أن كل عنصر غير صفري a هو عنصر وحدة ، إذن $(R, +, \cdot)$ حقل .

(8-2) العمليات على المثاليات :

① جمع المثاليات :

لتكن I, J مثاليتين في حلقة ما $(R, +, \cdot)$. نسمي المجموعة :

$$\{ x \in R : x = a + b ; a \in I , b \in J \}$$

مجموع المثاليتين I, J ونرمز لها بالرمز $I + J$.

للمبرهنة التالية تبين أن $I + J$ هي مثالية .

مبرهنة (8) :

لتكن I, J مثاليتين في حلقة ما $(R, +, \cdot)$. إن $I + J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

حسب التعريف السابق ، نلاحظ أن ، $\phi \neq I + J \subset R$.

إذا كان y, x عنصرين ما من $I + J$ ، فإنه يمكن كتابة ما يلي :

$$x = a + b ; a \in I , b \in J$$

$$y = c + d ; c \in I , d \in J$$

وبالتالي نجد :

$$x - y = (a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \in I + J$$

إذن الشرط الأول $x - y \in I + J$ محقق .

وإذا كان r من R و $a \in I, b \in J$; $x = a + b$ من $I + J$ فإن :

$$r.x = r.(a + b) = r.a + r.b \in I + J$$

$$x.r = (a + b).r = a.r + b.r \in I + J$$

نستنتج مما سبق أن $I + J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

نستنتج من التعريف السابق ومن المبرهنة السابقة ما يلي :

(1) إذا كانت I, J, K ثلاث مثاليات في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$I + J = J + I$$

$$I + (J + K) = (I + J) + K$$

(2) إن مجموعة كل المثاليات في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ مغلقة بالنسبة لعملية جمع

المثاليات .

(3) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وكانت I و J مثاليتين يساريتين أو (يمينيتين)

في الحلقة $(R, +, \cdot)$ فإن $I + J$ مثالية يسارية أو (يمينية) في نفس الحلقة $(R, +, \cdot)$.

② تقاطع مثاليات :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، إذا كانت I و J مثاليتين في الحلقة المذكورة . نسمي

المجموعة :

$$\{x \in R : x \in I, x \in J\}$$
 بتقاطع المثاليتين I و J ، ونرمز لها بالرمز $I \cap J$.

مبرهنة (9) :

إذا كانت I, J مثاليتين في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، عندئذ $I \cap J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

نلاحظ أولاً أن $\phi \neq I \cap J \subseteq R$.

ليكن x, y عنصرين ما من $I \cap J$ ، فإن : $x, y \in I$ و $x, y \in J$ وبالتالي فإن

$$x - y \in I \cap J \text{ و } x - y \in J \text{ و } x - y \in I$$

ليكن a, y عنصرين ما من $I \cap J$ و R على الترتيب، بما أن $y \in I \cap J$ ، فإن $y \in I$ و $y \in J$ ، وبالتالي فإن :

$$a.y, y.a \in I \text{ \& } a.y, y.a \in J$$

إذن : $a.y \in I \cap J \text{ \& } y.a \in I \cap J$

نستنتج مما سبق أن $I \cap J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

نستنتج من التعريف السابق والمبرهنة السابقة ما يلي :

1- إذا كانت I, J, K ثلاث مثاليات في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$I \cap J = J \cap I$$

$$I \cap (J \cap K) = (I \cap J) \cap K$$

2- إن مجموعة جميع المثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مغلقة بالنسبة لعملية التقاطع المعرفة على المثاليات.

3- إذا كانت I, J مثاليتين يساريتين أو يمينيتين (يمينيتين) في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ فإن $I \cap J$ مثالية يسارية أو (يمينية) في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

4- ترتبط العمليتان السابقتان بالعلاقة التالية :

$$I \cap (J + K) = J + (I \cap K)$$

حيث I, J, K ثلاث مثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، حيث أن $J \subseteq I$.

③ ضرب (جداء) المثاليات :

إذا كانت I و J مثاليتين في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، نسمي المجموعة :

$$\left\{ x \in R : x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i ; x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ضرب I بـ J ونرمز لها بالرمز $I \cdot J$.

مبرهنة (10) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت I, J مثاليتين فيها ، فإن $I \cdot J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

من الواضح (حسب تعريف جداء المثاليات) أن $\phi \neq I \cdot J \subseteq R$

إذا كان x, y عنصرين ما من $I \cdot J$ ، فإننا نستطيع كتابة ما يلي :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i ; x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$y = \sum_{j=1}^m x'_j \cdot y'_j ; x'_j \in I, y'_j \in J, m \in \mathbb{Z}^+$$

وبالتالي فإن :

$$x - y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{j=1}^m x'_j \cdot y'_j = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + \sum_{j=1}^m (-x'_j) \cdot y'_j \in I + J$$

ليكن الآن y عنصراً من $I \cdot J$ و a من R . بما أن $y \in I \cdot J$ فإن :

$$y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i ; x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+$$

وبالتالي يكون :

$$a \cdot y = a \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right) = \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i) \cdot y_i \in I \cdot J$$

$$y \cdot a = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right) \cdot a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_i \cdot a) \in I \cdot J$$

نستنتج مما سبق أن $I \cdot J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

نستنتج من التعريف السابق ومن المبرهنة السابقة ما يلي :

(1) إذا كانت I, J, K ثلاث مثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$$

(2) إن مجموعة كل المثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مغلقة بالنسبة لعملية ضرب

المثاليات .

(3) ترتبط العمليات السابقة في المثاليات I, J, K في حلقة ما $(R, +, \cdot)$ بالعلاقات

التالية :

$$I.(J+K) = (I.J) + I.K$$

$$(J+K).I = J.I + K.I$$

أي أن عملية ضرب المثاليات توزيعي على عملية جمع المثاليات في $(R, +, \cdot)$ ،
 كما أن $I.J \subseteq I \cap J$.
 ④ قسمة المثاليات :

بفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إيدالية ما ، وإذا كانت J, I مثاليين في الحلقة $(R, +, \cdot)$ فإن المجموعة $\{x \in R : x.J \subseteq I\}$ تسمى حاصل قسمة I على J ، ونرمز لذلك بـ $I:J$ أو بـ (I/J) .
 مبرهنة (11) :

إذا كانت J, I مثاليين في حلقة إيدالية ما $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ $J : I$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I .
 البرهان :

لنبرهن أولاً أن $I : J \subseteq R$. إن $I : J$ مجموعة جزئية من R . وإذا رمزنا لصفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 0 ، فإن $0.J = \{0\} \subseteq I$ وهذا يعني أن $0 \in I : J$ ، إذن $I : J \neq \emptyset$.

إذا كان x, y عنصرين ما من $I : J$ فإنه حسب التعريف السابق :

$$x.J \subseteq I , y.J \subseteq I$$

وبالتالي يكون $(x-y).J \subseteq I$ ومنه يكون $x-y \in I : J$.

بفرض أن x عنصراً من $I : J$ و a من R ، وبالتالي بما أن $x \in I : J$ ، فهذا يعني أن $x.J \subseteq I$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$a.(x.J) \subseteq I \Rightarrow (a.x).J \subseteq I \Rightarrow a.x \in I : J$$

نستنتج مما سبق أن $I : J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنبرهن أخيراً أن $I \subseteq I : J$ ، من أجل ذلك ، إذا كان a عنصراً من I ، فإن

. $a \in I : J \subseteq I$ ، وهذا يعني أن $a \in J \subseteq I$.

⑤ جذر المثاليات :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، المجموعة التالية :

$$\left\{ x \in R : \exists n \in \mathbb{Z}^+ ; x^n \in I \right\}$$

تسمى جذر المثالية I ، ونرمز لها بـ \sqrt{I} .

مبرهنة (12) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، فإن \sqrt{I} هي مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$

تحتوي I .

البرهان :

نلاحظ أولاً أن $\phi \neq \sqrt{I} \subseteq R$.

إذا كان x, y عنصرين ما من \sqrt{I} ، فحسب التعريف السابق ، يوجد عددان

صحيحان موجبان m, n ، بحيث يكون $x^n \in I, y^m \in I$. وبالتالي فإن :

$$(x - y)^{n+m-1} \in I \Rightarrow x - y \in \sqrt{I}$$

وإذا كان x عنصراً ما من I و a من R ، فإنه يمكن إيجاد عدد صحيح موجب ،

وليكن n ، بحيث يكون $x^n \in I$ ، وبالتالي فإن $(a \cdot x)^n \in I$ ومنه يكون $a \cdot x \in \sqrt{I}$.

نستنتج مما سبق أن \sqrt{I} مثالية في الحلقة الإبدالية $(R, +, \cdot)$.

لنبرهن أخيراً أن \sqrt{I} تحوي I في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

ليكن y عنصراً ما من I ، وبالتالي فإن $y^1 \in I$ ، وبالتالي فإن $y \in \sqrt{I}$ وهذا يعني

أن \sqrt{I} مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I .

مثال (12) :

لتكن K, J, I مثاليات يسارية (بمينية) في حلقة ما ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان

$I \subseteq K$. أثبت أن :

$$I + (J \cap K) = (I + J) \cap K$$

الحل :

ليكن $x \in I + (J \cap K)$ وهذا يعني أن $x = a + b$ حيث $a \in I$ و $b \in J \cap K$ أي $b \in J$ و $b \in K$.

بما أن $b \in J$ فإن $x = a + b \in I + J$.

من ناحية ثانية ، بما أن $b \in K$ وأن $a \in I \subseteq K$ نجد أن $x = a + b \in K$.
نستنتج مما سبق أن : $x = a + b \in (I + J) \cap K$ أي أن :

$$I + (J \cap K) \subseteq (I + J) \cap K$$

ليكن $y \in (I + J) \cap K$ ، عندئذ $y \in I + J$ و $y \in K$ ، وبالتالي ، فإن $y = a + b$ ،
حيث أن $a \in I$ ، $b \in J$. وبما أن $I \subseteq K$ فإن $a \in K$ و $b = y - a \in K$ ، إذن $b \in J \cap K$ ، وهذا يبين لنا أن : $y = a + b \in I + (J \cap K)$ ، أي أن :

$$(I + J) \cap K \subseteq I + (J \cap K)$$

نستنتج مما سبق أن :

$$(I + J) \cap K = I + (J \cap K)$$

مثال (13) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما، ولتكن K, J, I مثاليات في هذه الحلقة ، أثبت صحة العلاقة:

$$I : (J \cdot K) = (I : J) : K$$

الحل :

ليكن x عنصراً ما من $I : (J \cdot K)$ ، وبالتالي فإن : $x \cdot (J \cdot K) \subseteq I$ ، ومنه
يكون : $(x \cdot K) \cdot J \subseteq I$ إذن : $x \in (I : J) : K$.

لنبرهن العكس :

ليكن y عنصراً ما من $(I : J) : K$ ، وبالتالي فإن : $y \cdot K \subseteq I : J$ ، وبالتالي فإن :

$y \in I : (J \cdot K) : \text{إذن } y \cdot (J \cdot K) \subseteq I$ ، أي أن $(y \cdot K) \cdot J \subseteq I$

نستنتج مما سبق أن : $I : (J \cdot K) = (I : J) : K$

ملاحظة (2) :

1- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت N, M مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من R ، فإن مجموعة كل العناصر التي من الشكل $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ حيث أن x_i من M و y_i من N و n عدد صحيح موجب، تسمى $M \cdot N$ ويرمز لها بـ $M \cdot N$.

وبصورة عامة : إذا كانت إحدى المجموعتين M, N ولتكن M تتألف من عنصر واحد فقط وليكن a مثلاً، فإننا سنرمز بـ $M \cdot N$ في هذه الحالة بالشكل $a \cdot N$.

نتائج :

- (1) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن I مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت J مثالية يمينية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن $I \cdot J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.
- (2) إذا كانت I مثالية يسارية في حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت J مجموعة جزئية غير خالية من R ، فإن $I \cdot J$ مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.
- (3) إذا كانت I مثالية يمينية في حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت J مجموعة جزئية غير خالية من R ، فإن $I \cdot J$ مثالية يمينية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.
- (4) إذا كانت I مثالية في حلقة إبدالية ما $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت J مجموعة جزئية غير خالية من R ، فإن $I \cdot J$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(9-2) حلقة القسمة Quotient group :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وإذا كانت I مثالية فيها . نعلم أن $(I, +)$ زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية $(R, +)$. وبما أن كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية هي زمرة جزئية ناظمية منها ، فإن الزمرة الجزئية $(I, +)$ ، هي إذاً زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(R, +)$ ، وبالتالي فإن $(R/I, +)$ زمرة إبدالية حيث أن :

$$R/I = \{x + I : x \in R\}$$

إن (+) عملية جبرية ثنائية معرفة على R/I بالشكل :

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I ; \forall x, y \in I$$

ولنعرف على المجموعة R/I العملية (.) بالشكل :

$$(x + I) \cdot (y + I) = (x \cdot y) + I ; \forall x, y \in I$$

مجموعة العناصر من R/I ، تسمى عادةً بالمجموعات المشاركة Costes لـ I في R .

تبيّن المبرهنة التالية أن $(R/I, +, \cdot)$ حلقة ، وهذه الحلقة تسمى بحلقة القسمة .

مبرهنة (13) :

لتكن I مثالية في حلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا عرفنا على عناصر المجموعة

$$R/I = \{x + I ; x \in I\}$$

بالشكل التالي :

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

$$(x + I) \cdot (y + I) = (x \cdot y) + I ; \forall x, y \in I$$

عندها تكون $(R/I, +, \cdot)$ حلقة . وإذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ إبدالية فإن $(R/I, +, \cdot)$

حلقة إبدالية . وإذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد (ذات عنصر الوحدة) ، فإن الحلقة $(R/I, +, \cdot)$ ستكون بمحايد أيضاً .

البرهان :

لنبرهن أولاً أن عملية الضرب (.) حسنة التعريف (معرفة جيداً) .

لنفرض أن $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ ، بحيث يكون :

$$x_1 + I = x_2 + I , y_1 + I = y_2 + I$$

$$\text{فإن : } x_1 - x_2 \in I , y_1 - y_2 \in I$$

وبالتالي فإن :

$$x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 = (x_1 - x_2) \cdot y_1 + x_2 (y_2 - y_1) \in I$$

ومنه يكون :

$$x_1.y_1 + I = x_2.y_2 + I$$

لنثبت الآن أن $(R/I, \cdot)$ شبه زمرة (تجميعية) .

لتكن x, y, z عناصر ما من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} (x + I) \cdot [(y + I)(z + I)] &= (x + I)(y.z + I) = x(y.z) + I \\ &= (x.y).z + I = (x.y + I).(z + I) = [(x + I).(y + I)].(z + I) \end{aligned}$$

لنبرهن الآن أن عملية الضرب (\cdot) توزيعية على عملية الجمع $(+)$ في R/I .

$$\begin{aligned} (x + I) \cdot [(y + I) + (z + I)] &= (x + I) \cdot [(y + z) + I] = x.(y + z) + I \\ &= (x.y + x.z) + I = (x.y + I) + (x.z + I) \\ &= (x + I).(y + I) + (x + I).(z + I) \end{aligned}$$

وبالطريقة ذاتها نبرهن أن :

$$\begin{aligned} [(y + I) + (z + I)] \cdot (x + I) &= [(y + z) + I] \cdot (x + I) = (y + z).x + I \\ &= (y.x + z.x) + I = (y.x + I) + (z.x + I) \\ &= (y + I).(x + I) + (z + I).(x + I) \end{aligned}$$

بعد الأخذ بعين الاعتبار أن $(R/I, +, \cdot)$ زمرة إبدالية .

نستنتج مما سبق أن $(R/I, +, \cdot)$ حلقة ، ولنبرهن أنها إذا كانت $(R, +, \cdot)$ إبدالية

بمحايد فإن $(R/I, +, \cdot)$ هي أيضاً إبدالية وبمحايد .

فإذا كان x, y عنصرين ما من الحلقة R ، فإن :

$$(x + I).(y + I) = x.y + I = y.x + I = (y + I).(x + I)$$

وإذا رمزنا لمحايد الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 1 فإن $1 + I$ ينتمي إلى R/I ، ومن جهة

ثانية لدينا :

$$(x + I).(1 + I) = (1 + I).(x + I) = x + I ; x + I \in R/I$$

نود الإشارة إلى أن : $0 + I = I$ هو صفر حلقة القسمة R/I . كما أن العنصر

$-x + I$ ، هو المعكوس التجميعي للعنصر $x + I$ ، حيث $x \in R$.

تعريف :

نسمي الحلقة الواردة في المبرهنة السابقة $(R/I, +, \cdot)$ بحلقة القسمة
.Factor ring or Quotient ring

مبرهنة (14) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن I مثالية فيها . إن المثاليات اليسارية (اليمينية) في حلقة القسمة $\bar{R} = (R/I, +, \cdot)$ هي من الشكل $\bar{K} = \frac{K}{I}$. حيث أن K مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وأن $I \subseteq K$.
البرهان :

لنفرض أن \bar{K} مثالية يسارية في الحلقة \bar{R} ، ولنبرهن أولاً أن $\bar{K} = \frac{K}{I}$ حيث K مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وتحتوي I .
لنأخذ المجموعة $K = \{x : x \in R ; x + I \in \bar{K}\}$ ، ولنثبت أن K هي مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.
بما أن \bar{K} مثالية يسارية في \bar{R} فإن $\bar{0} = 0 + I \in \bar{K}$ ، ومنه $0 \in K$ ، وهذا يعني $K \neq \emptyset$.

ليكن x, y عنصرين ما من K ، وبالتالي يكون :

$$\bar{x} = x + I , \bar{y} = y + I$$

$$(x - y) + I = (x + I) + (-y + I) = \bar{x} - \bar{y} \in \bar{K} \quad \text{ومنه :}$$

وهذا يبين لنا أن : $x - y \in K$.

كذلك ، أيأ كان $a \in R$ فإن $a = a + I \in \bar{R}$ ، ومنه :

$$a \cdot x + I = (a + I) \cdot (x + I) = \bar{a} \cdot \bar{x} \in \bar{K}$$

نستنتج مما سبق أن المجموعة K تشكل مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنبرهن الآن أن $I \subseteq K$.

ليكن $a \in I$ ، فإن $a + I = \bar{a} \in \bar{K}$ ، أي أن $a \in K$ ، وبالتالي نجد : $I \subseteq K$.

لنبرهن أخيراً أن $\bar{K} = \frac{K}{I}$:

ليكن $\bar{Z} = Z + I \in \frac{K}{I}$ ، وبالتالي فإن $z \in K$ ، ومنه $z + I \in \bar{K}$ أي أن $\frac{K}{I} \subseteq \bar{K}$.

من ناحية أخرى ليكن $\bar{Z} \in \bar{K} \subseteq \frac{K}{I}$ ، عندئذٍ $\bar{Z} = Z + I$ حيث $Z \in R$. وبما أن

$\bar{Z} = Z + I \in \bar{K}$ فإن $Z \in K$ ، وبالتالي نجد أن : $\bar{Z} = Z + I \in \frac{K}{I}$ ، أي أن

$$\bar{K} \subseteq \frac{K}{I}$$

مما سبق نجد أن $\bar{K} = \frac{K}{I}$.

(10-2) أمثلة :

1- من المعلوم أن $6.Z$ هي مثالية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، وبالتالي فإن :

$$\frac{2\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} = \{0 + 2\mathbb{Z}, 2 + 6\mathbb{Z}, 4 + 6\mathbb{Z}\}$$

حلقة إبدالية بمحايد (حسب المبرهنة السابقة) .

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ هي حلقة المصفوفات التي من الشكل :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

بالنسبة للعمليات جمع وضرب المصفوفات . ونعلم أن :

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq R$$

هي مثالية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ $(R/I, +, \cdot)$ هي حلقة إبدالية بمحايد .

الحل :

نلاحظ أولاً أن :

$$R/I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + I; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + I$$

يمكن التأكد بسهولة الآن أن $(R/I, +, \cdot)$ هي حلقة إبدالية بمحايد .

نتيجة (2) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تحتوي على قواسم للصفر ، وكانت I مثالية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فليس من الضروري أن تحتوي حلقة القسمة $(R/I, +, \cdot)$ ، على قواسم للصفر .

لإثبات ذلك ، نأخذ الحلقة $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ التي تحتوي قواسم للصفر ، ولكن حلقة

القسمة $\left(\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \times \{0\}}, +, \cdot \right)$ لا تحتوي على قواسم للصفر .

الفصل الثالث

التماثل الحلقي

Isomorphism of ring

الفصل الثالث

التماثل الحلقي

Isomorphism of ring

لا يكفي علم الجبر بدراسة البنى الجبرية وخواصها ، بل يتعداها إلى دراسة التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى . وتلعب التطبيقات التي تسمى تشاكلاً (Homomorphism) دوراً مهماً جداً في علم الجبر . والتماثل (Isomorphism) يمكننا من معرفة ناتج عملية على عناصر إحدى البنيتين الجبريتين ، دون إجراء الحساب في هذه البنية ، وإنما إجراء الحسابات في البنية الأخرى، والتي قد تكون أبسر وأسرع . ويمكن تشبيه التماثل بقاموس (معجم) يمكننا من التحقق من أن جملة ما في إحدى اللغات ، تقابل جملة لها نفس المعنى في لغة أخرى .

(1-3) تعريف التشاكل Homomorphism :

لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين ما ، وليكن φ تطبيقاً من R إلى S ، نسمي التطبيق φ تشاكلاً من الحلقة R إلى الحلقة S إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) T \varphi(y) \quad : \text{ لكل } y, x \text{ من } R \text{ ، يكون :}$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \star \varphi(y) \quad : \text{ لكل } y, x \text{ من } R \text{ ، يكون :}$$

ونقول إن التطبيق $\varphi : R \longrightarrow S$ تشاكلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ على الحلقة (S, T, \star) ، إذا كان التطبيق φ شاملاً ويحقق الشرطين (a) و (b) السابقين .

ونسمي التطبيق السابق φ تماثلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) إذا كان التطبيق φ متبايناً (أحادياً) ، ويحقق الشرطين (a) و (b) أيضاً .

ويسمى التطبيق φ (السابق) تماثلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ على الحلقة (S, T, \star) ، إذا كان التطبيق φ تقابلاً (متبايناً وشاملاً) ويحقق أيضاً الشرطين (a) و (b) .

ونرمز عادةً لهذا التماثل بـ \cong ونكتب $(R, +, \cdot) \cong (S, T, \star)$ أو اختصاراً $R \cong S$.

ونقول إن الحلقتين $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) متماثلتان ، إذا وُجِدَ تماثل $\varphi: R \longrightarrow S$ أو $\varphi: S \longrightarrow R$.

ملاحظة (1) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ و $(S, +, \cdot)$ حلقتين ما ، فإن التطبيق $\varphi: R \longrightarrow S$ يسمى تشاكلاً إذا حقق الشرطين التاليين :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad (a)$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad (b)$$

لكل y, x من R .

الشرط الأول (a) يعني أن التطبيق φ يحافظ على عملية الجمع ، والشرط الثاني يعني أن φ يحافظ على عملية الضرب .

ونود الإشارة، إلى أن بعض المراجع الأجنبية تعرّف التشاكل الحلقي $\varphi: R \longrightarrow S$ على أنه التطبيق الذي يحقق الشروط التالية :

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad (a)$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (b)$$

$$\varphi(1) = 1 \text{ لكل } b, a \text{ من } R \quad (c)$$

حيث أن 1 هو عنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(2-3) أمثلة :

1- لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين ما ، ولنرمز لصفر الحلقة (S, T, \star) بـ σ' ، التطبيق $\varphi: R \longrightarrow S$ والمعرف بالشكل $\varphi(x) = \sigma'$; $\forall x \in R$ هو تشاكل للحلقة R في الحلقة (S, T, \star) .

الحل :

من أجل أي عنصرين y, x من R ، فإن :

$$\varphi(x + y) = \sigma' = \sigma' T \sigma' = \varphi(x) T \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot y) = \sigma' = \sigma' \star \sigma' = \varphi(x) \star \varphi(y)$$

يسمى عادةً التماثل السابق بالتماثل المبتذل (Trivial homomorphism).

2- لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، ولنرمز لعنصر الوحدة (المحايد) بـ 1 ولنكن Δ_1 و Δ_2 عمليتين ثنائيتين معرفتين على R ، بالشكل :

$$x \Delta_1 y = x + y + 1 , \quad x \Delta_2 y = x + y + x \cdot y$$

لكل x, y من R .

من السهل التأكد من أن (R, Δ_1, Δ_2) حلقة .

المطلوب بين أن الحقتين (R, Δ_1, Δ_2) و $(R, +, \cdot)$ متماثلتان .

الحل :

لنعرف التطبيق $\varphi : R \longrightarrow R$ بالشكل :

$$\varphi(x) = x + 1 ; \quad \forall x \in R$$

لنثبت أولاً أن φ تماثل للحلقة (R, Δ_1, Δ_2) على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

ليكن x, y عنصرين ما من R ، فإن :

$$\begin{aligned} \varphi(x \Delta_1 y) &= \varphi(x + y + 1) = (x + y + 1) + 1 \\ &= (x + 1) + (y + 1) = \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

الشرط الأول محقق .

$$\begin{aligned} \varphi(x \Delta_2 y) &= \varphi(x + y + x \cdot y) = (x + y + x \cdot y) + 1 \\ &= (x + 1) \cdot (y + 1) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \end{aligned}$$

الشرط الثاني محقق أيضاً ، إذن التطبيق φ تماثل .

لنثبت الآن أن التطبيق φ متبايناً .

ليكن x, y عنصرين ما من $(R, +, \cdot)$ ، بحيث يكون $\varphi(x) = \varphi(y)$ ومنه يكون :

$$x + 1 = y + 1 : \quad \text{أي أن } x = y$$

لنبرهن أخيراً أن φ شامل :

ليكن y عنصراً ما من R ، إن $y - 1 \in R$ ، ومن ناحية ثانية إن $\varphi(y - 1) = y$.

نستنتج مما سبق أن φ تماثل للحلقة (R, Δ_1, Δ_2) على الحلقة $(R, +, \cdot)$ أي أن الحلقتين متماثلتان .

3- ليكن التطبيق $\varphi : Z_5 \longrightarrow Z_{10}$ والمعرف بالشكل :

$$\varphi(x) = 5x ; \forall x \in Z_5$$

بيّن فيما إذا كان التطبيق φ من الحلقة $(Z_5, +, \cdot)$ إلى الحلقة $(Z_{10}, +, \cdot)$ تشاكلاً .

الحل :

نلاحظ أن الشرط الأول الوارد في تعريف التشاكل غير محقق لأنه على سبيل

المثال :

$$\varphi(2 + 4) = \varphi(1) = 5 \cdot 1 = 5$$

كما أن :

$$\varphi(2) + \varphi(4) = 0 + 0 = 0$$

وبالتالي فإن :

$$\varphi(2 + 4) \neq \varphi(2) + \varphi(4)$$

4- إن حلقة الأعداد الحقيقية $(R, +, \cdot)$ لا تماثل حلقة الأعداد المركبة $(C, +, \cdot)$

لأنه على سبيل المثال المعادلة $x^2 + 4 = 0$ لها حل $x = \pm\sqrt{-2}$ في الحلقة C ، ولكن لا يوجد لها حل في حلقة الأعداد الحقيقية .

5- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، بيّن أن التطبيق φ المعرف بالشكل :

$$\varphi : Z \longrightarrow R , \varphi(n) = n \cdot 1 \text{ حيث } n \in Z \text{ تشاكل}$$

الحل :

لكل m, n من الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، يكون لدينا :

$$\varphi(m + n) = (m + n) \cdot 1 = m \cdot 1 + n \cdot 1 = \varphi(m) + \varphi(n)$$

$$\varphi(m \cdot n) = (m \cdot n) \cdot 1 = (m \cdot n) (1 \cdot 1) = (m \cdot 1) \cdot (n \cdot 1)$$

$$= \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

نستنتج مما سبق أن التطبيق φ تشاكلاً .

(3-3) مفاهيم وملاحظات :

ليكن $(R, +, \cdot)$ و $(S, +, \cdot)$ حلقتين ما ، ولنفرض أن $\varphi : R \longrightarrow S$ تشاكلاً ، أي يحقق φ الشرطين الواردين في تعريف التشاكل :

(1) إذا كان φ تشاكلاً وتطبيقاً متبايناً ، فإننا نقول إن التطبيق φ تشاكل متباين (monomorphism) .

(2) إذا كان φ تشاكلاً ، وتطبيقاً شاملاً ، فإننا نقول إن التطبيق φ تشاكل شامل (epimorphism) .

(3) وإذا كان φ تشاكلاً تقابلاً ، فإننا نقول إن φ تماثل (isomorphism) .

(4) وإذا كان $\varphi : R \longrightarrow R$ تشاكلاً ، فإننا نقول إن φ تشاكل ذاتي (endomorphism) ، وإذا كان التطبيق φ تماثلاً . فإننا نقول إن φ تماثل ذاتي (automorphism) .

إذا كان $\varphi : R \longrightarrow S$ تماثلاً ، فإن $\varphi^{-1} : S \longrightarrow R$ تماثل أيضاً .

(5) لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين ما ، ولنرمز لصفر الحلقة (S, T, \star) بـ o' . ولنفرض أن التطبيق $\varphi : R \longrightarrow S$ تشاكل للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) ، فإن المجموعة التالية: $\{x \in R : \varphi(x) = o'\}$ تسمى بنواة التطبيق φ ، ويرمز لها بالرمز $\text{Ker } \varphi$. إذن :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in R : \varphi(x) = o'\}$$

كما أن صورة التطبيق φ ونرمز لها عادةً بـ $\text{Im } \varphi$ هي المجموعة :

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(x) : x \in R\} = \varphi(R)$$

وكما درسنا في نظرية الزمر ، نقول إن التطبيق φ متباين إذا كان $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ، حيث 0 صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$. ونقول عنه إنه شامل إذا كانت $\text{Im } \varphi = S$.

مثال (6) :

إذا كانت الحلقة الجزئية $(S, +, \cdot)$ من حلقة $(M_2(R), +, \cdot)$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

وليكن التطبيق $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالشكل :

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = x ; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

المطلوب ، بيّن أن التطبيق φ تشاكل ، ثم حدّد نواته .

الحل :

لكل $\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & z \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ من S ، إن :

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) &= \varphi \left(\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 0 & x+z \end{pmatrix} \right) = x+z \\ &= \varphi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) + \varphi \left(\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

إذن الشرط الأول محقق .

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) &= \varphi \left(\begin{pmatrix} x \cdot z & x \cdot t + y \cdot z \\ 0 & x \cdot z \end{pmatrix} \right) = x \cdot z \\ &= \varphi \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) \cdot \varphi \left(\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن φ تشاكل ، لنوجد الآن نواته .

حسب تعريف نواة التطبيق φ يكون لدينا :

$$\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}; x=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; y \in \mathbb{R} \right\}$$

مثال (7) :

لتكن $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة قياس n ، ولتكن حلقة المجموعات

المشاركة $(Z/nZ, +, \cdot)$. أثبت أن $Z/nZ \cong Z_n$.

الحل :

لنشكل التطبيق φ من Z/nZ إلى Z_n بالشكل التالي :

$$\varphi : Z/n.Z \longrightarrow Z_n$$

$$\varphi(x + n.Z) = [x]$$

لنثبت أولاً أن φ تشاكل .

لكل $x + n.Z$ و $y + n.Z$ من $Z/n.Z$ ، فإن :

$$\begin{aligned} \varphi[(x + n.Z) + (y + n.Z)] &= \varphi(x + y + n.Z) = [x + y] = \\ &= [x] + [y] = \varphi(x + n.Z) + \varphi(y + n.Z) \end{aligned}$$

أي أن الشرط الأول محقق .

$$\begin{aligned} \varphi[(x + n.Z) \cdot (y + n.Z)] &= \varphi(x \cdot y + n.Z) = [x \cdot y] = \\ &= [x] \cdot [y] = \varphi(x + n.Z) \cdot \varphi(y + n.Z) \end{aligned}$$

والشرط الثاني محقق أيضاً .

إذن التطبيق φ تشاكل .

لنبرهن الآن أن φ متباين . ليكن $x + n.Z \in \text{Ker } \varphi$ ، وهذا يعني :

$$\varphi(x + n.Z) = [0] ، ولكن \varphi(x + n.Z) = [x] ، إذن [x] = [0] وهذا يعني أن$$

$$x \in [0] ، أي أن x + n.Z = n.Z ، وبما أن n.Z هو صفر الحلقة (Z/n.Z, +, \cdot) ،$$

إذن φ متباين .

لنبرهن أخيراً أن φ شامل .

ليكن $[x]$ عنصراً ما من الحلقة $(Z_n, +, \cdot)$ ، أي أن $\varphi(x + n.Z) = [x]$ ، وهذا

يعني أن φ شامل .

نستنتج مما سبق أن الحقتين $(Z/n.Z, +, \cdot)$ و $(Z_n, +, \cdot)$ متماثلتان .

مبرهنة (1) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً منتهياً ما ، مميزه P ، عندها يكون التطبيق $\varphi : F \longrightarrow F$

المعرف بالشكل : $\varphi(x) = x^P$ ، لكل x من F ، تماثلاً ذاتياً على الحقل F ، ويكون
 . $F_{\{\varphi\}} \cong Z_P$

نسمي عادةً هذا التماثل بتماثل فرايبينوس Frobenius Automorphism .
 البرهان :

إذا كان y, x عنصرين من الحقل F ، عندئذٍ يكون :

$$(x+y)^P = x^P + (P-1)x^{P-1}.y + \frac{P(P-1)}{2}x^{P-2}.y^2 + \dots + (P-1)x.y^{P-1} + y^P$$

وبما أن P مميز الحقل F ، فيكون :

$$(x+y)^P = x^P + 0 + 0 + \dots + 0 + y^P = x^P + y^P$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$\varphi(x+y) = (x+y)^P = x^P + y^P = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x.y) = (x.y)^P = x^P.y^P = \varphi(x).\varphi(y)$$

إذن التطبيق φ يمثل تشاكلاً .

لنبرهن أن φ متباين (أحادي) .

بما أن $\varphi(x) = 0$ أي أن $x^P = 0$ ، وبالتالي يكون $x = 0$ ، وهذا يعني أن
 . $\text{Ker } \varphi = 0$

بما أن الحقل F منته ، وهذا يؤدي إلى أن التطبيق φ شامل .

إذن ، نستنتج مما سبق ، أن φ يمثل تماثلاً ذاتياً .

لنبرهن أخيراً أن $F_{\{\varphi\}} \cong Z_P$.

بما أن الحقل F منته ، ومميزه P ، فهو يحوي حقلاً جزئياً يماثل الحقل Z_P ،
 ويكون من أجل العنصر $a \in Z_P$:

$$\varphi(a) = a^P = a ; \forall a \in Z_P$$

وذلك حسب مبرهنة فيرما .

وبالتالي فإن كثيرة الحدود $f(x) = x^P - a \in F[x]$ يكون لها P جذراً في الحقل F

وهي بالتحديد عناصر الحقل Z_p .

بما أن كثيرة الحدود $f(x)$ لها على الأكثر P جذراً في الحقل F ، إذن العناصر
الثابتة من F تحت تأثير التماثل φ هي فقط عناصر الحقل Z_p .

إذن $F_{\{\varphi\}} \cong Z_p$.

لنقدم الآن بعض خواص التماثل الحلقى ، من خلال المبرهنات التالية :

مبرهنة (2) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين ما ، ولنرمز لصفري الحلقتين السابقتين
بالرمز o, o' على الترتيب ، وإذا كان φ تشاكلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة
 (S, T, \star) ، عندها يتحقق ما يلي :

$$(1) \quad \varphi(o) = o'$$

$$(2) \quad \varphi(-x) = -\varphi(x) \text{ ، لكل } x \text{ من } R .$$

$$(3) \quad \text{أياً كان } n \in \mathbb{N}^* \text{ ، وأياً كان } x \in R \text{ ، فإن :}$$

$$\varphi(x^n) = [\varphi(x)]^n \quad \text{و} \quad \varphi(n \cdot x) = n \cdot \varphi(x)$$

$$(4) \quad \text{إن } (\text{Ker } \varphi, +, \cdot) \text{ حلقة جزئية من الحلقة } (R, +, \cdot) .$$

(5) الصورة المباشرة وفق φ لأية حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي حلقة
جزئية من الحلقة (S, T, \star) .

(6) الصورة العكسية ، وفق φ ، لأية حلقة جزئية من الحلقة (S, T, \star) هي
حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

(1) بما أن التطبيق φ تشاكل للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) ، فإن :

$$\varphi(o + o) = \varphi(o) T \varphi(o)$$

$$\varphi(o) = \varphi(o) T \varphi(o) \quad \text{: أي أن}$$

$$\varphi(o) T o' = \varphi(o) T \varphi(o) \quad \text{: وبالتالي فإن}$$

ومنه نجد أن $\varphi(o) = o'$.

- (2) من أجل أي x من R يكون: $x + (-x) = o$ ، ومنه $\varphi(x + (-x)) = \varphi(o)$.
وبما أن φ تشاكل ، ومن (1) نجد أن : $\varphi(x) + \varphi(-x) = o'$ ، لكل x من R .
وبالتالي يكون : $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ لكل x من R .
(3) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in R$ يكون :

$$\begin{aligned}\varphi(n.x) &= \varphi(x + x + \dots + x) \\ &= \varphi(x) + \varphi(x) + \dots + \varphi(x) = n.\varphi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x^n) &= \varphi(x.x \dots x) \\ &= \varphi(x).\varphi(x).\dots.\varphi(x) = [\varphi(x)]^n\end{aligned}$$

(4) لنبرهن أولاً أن : $\text{Ker } \varphi \neq \emptyset$.

حسب تعريف $\text{Ker } \varphi$ ، أنها مجموعة جزئية من R ، من ناحية ثانية ، بما أن $\varphi(o) = o'$ حسب (1) ، فإن $o \in \text{Ker } \varphi$ أي أن $\text{Ker } \varphi \neq \emptyset$.

ليكن x, y عنصرين ما من $\text{Ker } \varphi$ ، فإن : $\varphi(x) = \varphi(y) = o'$ وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}\varphi(x) \star \varphi(y) &= o' \star o' \\ \varphi(x) + \varphi(y) &= o' + o'\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}\varphi(x.y) = o' &\Rightarrow x.y \in \text{Ker } \varphi \\ \varphi(x) + \varphi(-y) = o' &\Rightarrow \varphi(x + (-y)) = o'\end{aligned}$$

أي أن : $x + (-y) \in \text{Ker } \varphi$

مما سبق ، نستنتج أن $(\text{Ker } \varphi, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(5) لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة جزئية ما ، من الحلقة $(R, +, \cdot)$. ولنبرهن أن $(\varphi(A), +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(S, +, \cdot)$.

إن $\varphi(A)$ مجموعة جزئية من S ، كما أن $\varphi(A) \neq \emptyset$ ، لأنه : بما أن $(A, +, \cdot)$

حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن $o \in A$ ، وبالتالي ، فإن $\varphi(o) \in \varphi(A)$ ، إذن $\varphi(A) \neq \emptyset$.

ليكن الآن y_1, y_2 عنصرين ما من $\varphi(A)$ ، وبالتالي يوجد عنصرين x_1, x_2 من A بحيث يكون : $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$ ، ومنه :

$$\begin{aligned} y_1 \text{ T } (-y_2) &= \varphi(x_1) \text{ T } (-\varphi(x_2)) = \varphi(x_1) + \varphi(-x_2) \\ &= \varphi(x_1 + (-x_2)) \in \varphi(A) \end{aligned}$$

و

$$y_1 \star y_2 = \varphi(x_1) \star \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \cdot x_2) \in \varphi(A)$$

نستنتج مما سبق أن $(\varphi(A), \text{T}, \star)$ حلقة جزئية من الحلقة (S, T, \star) . أي أن الصورة المباشرة وفق التطبيق φ ، لأية حلقة جزئية $(R, +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة (S, T, \star) .

(6) لنبرهن أخيراً ، أن الصورة العكسية لأية حلقة جزئية ، ولتكن (B, T, \star) من الحلقة (S, T, \star) هي حلقة جزئية .

نلاحظ أولاً ، أن $\varphi^{-1}(B) \subseteq R$ ، لأن $\varphi^{-1}(B)$ مجموعة جزئية من R ، وبما أن (B, T, \star) حلقة جزئية من الحلقة (S, T, \star) فإن $o' \in B$ ومنه $\varphi(o) \in B$ ، أي أن $o \in \varphi^{-1}(B)$ إذن $\varphi^{-1}(B) \neq \emptyset$.

ليكن الآن x_2, x_1 عنصرين ما من $\varphi^{-1}(B)$ ، وبالتالي ، فإن $\varphi(x_1) \in B$ و $\varphi(x_2) \in B$ أي أن :

$$\varphi(x_1) \text{ T } (-\varphi(x_2)) \in B \Rightarrow \varphi(x_1) \text{ T } \varphi(-x_2) \in B$$

$$\varphi(x_1 + (-x_2)) \in B \Rightarrow x_1 + (-x_2) \in \varphi^{-1}(B)$$

$$\varphi(x_1) \star \varphi(x_2) \in B \Rightarrow \varphi(x_1 \cdot x_2) \in B \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \varphi^{-1}(B)$$

نستنتج مما سبق أن $(\varphi^{-1}(B), +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$. إذن الصورة العكسية ، وفق φ ، لأية حلقة جزئية من الحلقة (S, T, \star) هي حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

المبرهنة التالية ، تقدم علاقة المثاليات بمفهوم التشاكل الحلقى .

مبرهنة (3) :

ليكن φ تشاكلاً لحققة ما $(R,+,.)$ في حققة ما $(S,T,*)$ ، عندئذ يتحقق ما يلي :

(1) $\text{Ker } \varphi$ مثالية في الحققة $(R,+,.)$.

(2) الصورة المباشرة ، وفق التطبيق φ ، لأية مثالية في الحققة $(R,+,.)$ ، هي

مثالية في الحققة $(S,T,*)$.

(3) الصورة العكسية ، وفق التطبيق φ ، لأية مثالية في الحققة $(S,T,*)$ ،

هي مثالية في الحققة $(R,+,.)$ ، تحوي نواة التطبيق φ .

(4) الحقتان $(\varphi(R),+,.)$ و $(R/\text{Ker } \varphi,+,.)$ متماثلتان .

(الطلب الأخير من هذه المبرهنة يعرف باسم المبرهنة الأولى لتماثل الحلقات)

. First isomorphism theorem

البرهان :

(1) بما أن $\varphi : R \longrightarrow S$ تشاكلاً ، فإن $(\text{Ker}(\varphi),+,.)$ حققة جزئية من

الحققة $(R,+,.)$ ، أي أن $(\text{Ker } \varphi,+,.)$ زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$ ، بالإضافة

لذلك ، إذا كان a, x عنصرين من $\text{Ker } \varphi$ و R على الترتيب ، فإن : $\varphi(x) = o'$

حيث أن o' هو صفر الحققة $(S,T,*)$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$\varphi(a.x) = \varphi(a) \star \varphi(x) = \varphi(a) \star o' = o'$$

$$\varphi(x.a) = \varphi(x) \star \varphi(a) = o' \star \varphi(a) = o'$$

ومنه يكون : $a.x$ و $x.a \in \text{Ker } \varphi$.

نستنتج مما سبق أن $\text{Ker } \varphi$ مثالية في الحققة $(R,+,.)$.

(2) لتكن J مثالية ما في الحققة $(R,+,.)$ ، وبما أن φ تشاكلاً من الحققة

$(R,+,.)$ على الحققة $(S,T,*)$ ، فإن $(\varphi(J),T,*)$ حققة جزئية من الحققة

$(S,T,*)$ ، وبالتالي ، فإن $(\varphi(J),T)$ زمرة جزئية من الزمرة (S,T) ، من ناحية

ثانية ، ليكن y, s عنصرين من S و $\varphi(J)$ على الترتيب ، وبالتالي يمكن إيجاد

عنصرين a و x من R و J على الترتيب ، بحيث يكون : $\varphi(a) = s$, $\varphi(x) = y$ وبالتالي فإن :

$$s \star y = \varphi(a) \star \varphi(x) = \varphi(a.x) \in \varphi(J)$$

$$y \star s = \varphi(x) \star \varphi(a) = \varphi(x.a) \in \varphi(J)$$

نستنتج من ذلك ، أن $\varphi(J)$ مثالية في الحلقة (S, T, \star) ، وبالتالي فإن الصورة المباشرة وفق φ لأية مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي مثالية في الحلقة (S, T, \star) .

(3) ليكن I مثالية ما في الحلقة (S, T, \star) . بما أن φ تشاكلاً من الحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) ، فإن $(\varphi^{-1}(I), +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبالتالي ، فإن زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$ ، وإذا كان a, y عنصرين ما من $\varphi^{-1}(I)$ و R على الترتيب ، فسيكون لدينا : $\varphi(a) \in S$ و $\varphi(y) \in I$ وبما أن φ تشاكلاً ، فإن :

$$\varphi(a) \star \varphi(y) = \varphi(a.y) \in I \Rightarrow a.y \in \varphi^{-1}(I)$$

$$\varphi(y) \star \varphi(a) = \varphi(y.a) \in I \Rightarrow y.a \in \varphi^{-1}(I)$$

نستنتج أن $\varphi^{-1}(I)$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنبرهن الآن أن هذه المثالية تحوي $\text{Ker } \varphi$.

ليكن z عنصراً ما من $\text{Ker } \varphi$ ، أي أن $\varphi(z) = o' \in I$ ، حيث أن o' هو صفر الحلقة (S, T, \star) . وبالتالي $z \in \varphi^{-1}(I)$.

نستنتج مما سبق ، أن الصورة العكسية وفق التطبيق φ ، لأية مثالية في الحلقة (S, T, \star) ، هي مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، تحوي نواة التطبيق φ .

(4) لنعرف التطبيق : $\Psi : R/\text{Ker } \varphi \longrightarrow \varphi(R)$ بالشكل :

$$\Psi(x + \text{Ker } \varphi) = \varphi(x) ; \forall x \in R$$

وذلك أيّاً كان $x + \text{Ker } \varphi \in R/\text{Ker } \varphi$ ، ولنبين أولاً أن التطبيق Ψ حسن التعريف لكل $x + \text{Ker } \varphi$ و $y + \text{Ker } \varphi \in R/\text{Ker } \varphi$ بحيث يكون :

$x + \text{Ker } \varphi = y + \text{Ker } \varphi$ وهذا يعني أن : $(x - y) + \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi$ ، أي

أن $\varphi(x - y) \in \text{Ker } \varphi$ وحسب تعريف نواة φ يكون $\varphi(x - y) = 0$ ، أي أن $\varphi(x) = \varphi(y)$. أي أن :

$$\Psi(x + \text{Ker } \varphi) = \Psi(y + \text{Ker } \varphi)$$

إذن التطبيق Ψ حسن التعريف .

لنبرهن الآن أن Ψ تشاكل ، من أجل ذلك :

$$\begin{aligned} \Psi[(x + \text{Ker } \varphi) + (y + \text{Ker } \varphi)] &= \Psi[(x + y) + \text{Ker } \varphi] \\ &= \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= \Psi(x + \text{Ker } \varphi) + \Psi(y + \text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

من ناحية ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} \Psi[(x + \text{Ker } \varphi) \cdot (y + \text{Ker } \varphi)] &= \Psi[x \cdot y + \text{Ker } \varphi] \\ &= \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ &= \Psi(x + \text{Ker } \varphi) \cdot \Psi(y + \text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

إن التطبيق Ψ شامل ، لأن إذا كان $Z \in \text{Im } \varphi$ ، فإنه يوجد عنصر r من R بحيث $Z = \varphi(r)$ ، وبالتالي ، فإن :

$$r + \text{Ker } \varphi \in R/\text{Ker } \varphi$$

$$\Psi(r + \text{Ker } \varphi) = \varphi(r) = Z$$

وأن

لنبرهن أخيراً أن Ψ متباين :

نفرض :

$$\Psi(x + \text{Ker } \varphi) = \Psi(y + \text{Ker } \varphi) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

أي أن $\varphi(x - y) = 0$ ، وهذا يعني أن $(x - y) \in \text{Ker } \varphi$. إذن :

$$(x - y) + \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi$$

أي أن $x + \text{Ker } \varphi = y + \text{Ker } \varphi$.

نستنتج مما سبق أن $R/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi = \varphi(R)$.

نتيجة (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين ما، وإذا كان $\varphi: R \longrightarrow S$ تشاكلاً ، إذا كان

φ شاملاً، فإن $R/\text{Ker } \varphi \cong S$.
البرهان :

ينتج البرهان ، بوضع في المبرهنة السابقة $\text{Im } \varphi = S$.

المبرهنة الثانية للتماثل الحلقى (2nd Isomorphism theorem) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت $I \triangleleft R$ و $H \leq R$ ، عندئذ :

$$(H + I)/I \cong \overline{H}/(H \cap I)$$

البرهان :

لنثبت أولاً أنه إذا كان $a \in H$ و $x, y \in H \cap I$ ، فإن $x - y$ ، $x \cdot a$ ، $a \cdot x$ من

$$H \cap I$$

واضح أن $I \triangleleft H + I$ ، لأن $I \triangleleft R$ و $I \leq I + H$ ، وكذلك $H \cap I \triangleleft H$ ، لأنه إذا

كان $x, y \in H \cap I$ و $a \in H$ ، فإن $x - y \in H$ و $x - y \in I$ ، وأيضاً $x \cdot a \in I$ ، $a \cdot x \in I$ ،

لأن $I \triangleleft R$ و $x \cdot a \in H$ و $a \cdot x \in H$ لأن $H \leq R$ ، وبالتالي ، فإن $x \cdot a$ ، $a \cdot x$ و $x - y$

من $H \cap I$.

لنعرف الآن التطبيق $\varphi : H \longrightarrow (H + I)/I$ بالشكل $\varphi(a) = a + I$ لكل a

من H .

بما أن $a = a + 0 \in H + I$ ، فإن $a + I \in (H + I)/I$.

لنبرهن الآن أن φ تشاكل حلقى .

لكل $a, b \in H$ ، فإن :

$$\varphi(a + b) = [(a + b)] + I = [a + I] + [b + I] = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b) + I = (a + I) \cdot (b + I) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

لنبرهن الآن أن φ شامل ، لكل $x + I \in (H + I)/I$ ، حيث $x \in H + I$ وبالتالي ،

فإن $x = a + i$ حيث $a \in H$ و $i \in I$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$x + I = (a + i) + I = a + I$$

وبالتالي $\varphi(a) = x + I = \varphi(x)$ ، وحسب المبرهنة الأولى للتماثل الحلقى يكون :

$$H/\text{Ker } \varphi \cong (H + I)/I \quad (*)$$

لنوجد أخيراً $\text{Ker } \varphi$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \{x \in H : \varphi(x) = I\} = \{x \in H : x + I = I\} \\ &= \{x \in H : x \in I\} = \{x \in H : x \in H \cap I\} = H \cap I \end{aligned}$$

بتعويض $\text{Ker } \varphi$ في علاقة التماثل الأخيرة نجد أن :

$$(H + I)/I \cong H/(H \cap I)$$

مثال (8) :

لتكن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت I مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، أثبت أن :

$$(S/(S \cap I), +, \cdot) \cong ((S + I)/I, +, \cdot)$$

الحل :

لنعرف التطبيق $\varphi : S \longrightarrow S + I$ بالشكل : $\varphi(x) = x + I$; $\forall x \in S$ ولنثبت أولاً ، أن التطبيق φ تشاكلاً من الحلقة $(S, +, \cdot)$ إلى الحلقة $((S + I)/I, +, \cdot)$ نواته $S \cap I$:

ليكن x_1, x_2 عنصرين ما من S ، فإن :

$$\varphi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + I = (x_1 + I) + (x_2 + I) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2) + I = (x_1 + I) \cdot (x_2 + I) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$$

وإذا كان y عنصراً ما من $S + I$ ، وبالتالي يمكن كتابته بالشكل :

$$y = s + i ; s \in S, i \in I$$

ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s + I = (s + I) + I \\ &= (s + I) + (i + I) = (s + i) + I \\ &= y + I \end{aligned}$$

لنبرهن الآن ، أن $\text{Ker } \varphi = S \cap I$.

ليكن $t \in \text{Ker } \varphi$ ، فإن :

$$\left. \begin{array}{l} t \in \text{Ker } \varphi ; \text{Ker } \varphi \leq R \Rightarrow t \in S \\ t \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(t) = I \Rightarrow t + I = I \Rightarrow t \in I \end{array} \right\} \Rightarrow t \in S \cap I$$

بالعكس ، ليكن z عنصراً ما من $S \cap I$ ، فإن :

$$\left. \begin{array}{l} z \in S , z \in I \\ z \in S , \varphi(z) = I \end{array} \right\} \Rightarrow z \in \text{Ker } \varphi$$

مما سبق ، نستنتج أن φ تشاكل للحلقة $(S, +, \cdot)$ على الحلقة $(S + I / I, +, \cdot)$ نواته إذاً : $S + I$

$$(S / (S \cap I), +, \cdot) \cong ((S + I) / I, +, \cdot)$$

المبرهنة التالية ، توضح ، أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد (ذات عنصر وحدة) ، وإذا كان φ تشاكلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ على حلقة ما (S, T, \star) ، فإن الحلقة (S, T, \star) بمحايد أيضاً ومحايدتها هو $\varphi(1)$ ، حيث 1 هو عنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

مبرهنة (4) :

لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، ولنرمز بـ 1 لعنصر الوحدة فيها ، وإذا كان x عنصراً من R وله معكوس بالنسبة للعملية (\cdot) ، وإذا كان φ تشاكلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ في حلقة (S, T, \star) ، فإن :

$$(1) \quad \varphi(1) \text{ محايد في الحلقة } (\varphi(R), +, \cdot) .$$

$$(2) \quad \varphi(x^{-1}) \text{ هو معكوس } \varphi(x) \text{ في } \varphi(R) \text{ بالنسبة للعملية } \star .$$

البرهان :

(1) إذا كان y عنصراً ما من $\varphi(R)$ ، فإنه بالإمكان إيجاد عنصر x من R ،

$$\text{بحيث يكون : } \varphi(x) = y$$

بما أن 1 هو المحايد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالنسبة للعملية (\cdot) ، فإن :

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

$$\varphi(1 \cdot x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x)$$

وبالتالي ، يكون لدينا :

ومنه ، وبسبب φ تشاكل :

$$\varphi(1) \star \varphi(x) = \varphi(x) \star \varphi(1) = \varphi(x)$$

إذن :

$$\varphi(1) \star y = y \star \varphi(1) = y$$

وبملاحظة أن : $\varphi(1) \in \varphi(R)$ ، نجد أن $\varphi(1)$ هو المحايد في الحلقة $(\varphi(R), T, \star)$.

(2) بما أن $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ فإن :

$$\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x^{-1} \cdot x) = \varphi(1)$$

وبالتالي ، فإن :

$$\varphi(x) \star \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1}) \star \varphi(x) = \varphi(1)$$

وبملاحظة أن $\varphi(x^{-1}) \in \varphi(R)$ نستنتج أن $\varphi(x^{-1})$ هو مقلوب $\varphi(x)$ في $\varphi(R)$ بالنسبة للعملية \star .

مبرهنة (5) (المبرهنة الثالثة لتمائل الحلقات) (3rd Isomorphism theorem):

إذا كان I و J مثاليين في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وحيث $J \subseteq I$ ، عندئذ يتحقق ما يلي :

(1) I/J مثالية في الحلقة $(R/J, +, \cdot)$.

$$\frac{R/J}{I/J} \cong R/I \quad (2)$$

البرهان :

(1) بما أن I مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وتحتوي المثالية J ، فإنه حسب المبرهنة

(14) في الفصل الثاني نجد أن I/J مثالية في الحلقة $(R/J, +, \cdot)$.

(2) لنعرّف $\varphi: R/J \longrightarrow R/I$ بالشكل : $\varphi(r + J) = r + I$ ، لكل r من

R و $r + J \in R/J$.

لنثبت أولاً أن φ حسن التعريف أيًا كان $x + J, y + J \in R/J$ ، وبحيث يكون :
 $x + J = y + J$ ، فإن $(x - y) + J = J$ ، وبالتالي ، $(x - y) \in J \subseteq I$ ، أي أن
 $x + I = y + I$: أي أن

$$\varphi(x + J) = \varphi(y + J)$$

لثبت الآن أن φ تشاكلاً .

$$\begin{aligned} \varphi[(x + J) + (y + J)] &= \varphi[(x + y) + J] = (x + y) + I \\ &= (x + I) + (y + I) = \varphi(x + J) + \varphi(y + J) \end{aligned}$$

كما أن :

$$\begin{aligned} \varphi[(x + J) \cdot (y + J)] &= \varphi[(x \cdot y) + J] = (x \cdot y) + I \\ &= (x + I) \cdot (y + I) = \varphi(x + J) \cdot \varphi(y + J) \end{aligned}$$

لنبرهن الآن أن : $\text{Ker } \varphi = I/J$

ليكن $r + J \in \text{Ker } \varphi$ ، وبالتالي $\varphi(r + J) = I$ ، كما أن $\varphi(r + J) = r + I$ ، ومنه
 يكون : $r + I = I$ ، أي أن $r \in I$ ، وبالتالي $r + J \in I/J$ ، إذن $\text{Ker } \varphi \subseteq I/J$.
 ليكن $z + J \in I/J$ ، عندئذٍ $z \in I$ ، كما أن : $\varphi(z + J) = z + I = I$ ، وبالتالي فإن :
 $z + J \in \text{Ker } \varphi$ ، إذن $I/J \subseteq \text{Ker } \varphi$ ، بهذا الشكل يكون : $I/J = \text{Ker } \varphi$.

من الواضح أن φ غامر ، إذن : $\frac{R/J}{I/J} \cong R/I$.

(4-3) بعض الحلقات الخاصة :

قبل البدء في تقديم بعض أنواع الحلقات ، نقدم بعض أنواع المثاليات الخاصة
 والتي تلعب دوراً أساسياً في الحلقات والحقول .

المثالية الأولية :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، نسمي كل مثالية I في الحلقة المدروسة
 مثالية أولية إذا تحقق الشرط التالي :

إذا كان b, a عنصرين ما من R بحيث $a, b \in I$ ، فإن أحد العنصرين b, a على الأقل ، ينتمي إلى I .

المثالية الأعظمية :

نقول عن المثالية I في الحلقة الإبدالية $(R, +, \cdot)$ إنها مثالية أعظمية إذا كان $I \neq R$ ، وإذا لم يكن بالإمكان إيجاد مثالية J في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I ، وبحيث يكون $J \neq I, J \neq R$.

أولاً : حلقة المثاليات الرئيسة :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، وإذا كان r عنصراً ما من R ، فإن $R.r$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، تسمى المثالية الرئيسة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مولدة بالعنصر r . ينتج من المفهوم السابق ، أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، وإذا كان r من R ، فإن $R.r = (r)$.

تعريف حلقة المثاليات الرئيسة :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، نقول عن الحلقة $(R, +, \cdot)$ إنها حلقة مثاليات رئيسة ، إذا ، فقط إذا ، كانت كل مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية رئيسة فيها .

مثال (9) :

إذا كانت $(Z, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة ، أثبت أن هذه الحلقة هي حلقة مثالية رئيسة .

الحل :

لندرس الحالتين التاليتين :

أ- إذا كانت $A = \{0\}$ ، فإن $A = Z.0$ ، وبالتالي فإن A مثالية رئيسة في الحلقة $(Z, +, \cdot)$ مولدة بالعنصر 0 .

ب- إذا كانت $A \neq \{0\}$ ، وبالتالي يوجد في المجموعة A أعداد صحيحة موجبة وسالبة . ولنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب من A . إن $A = Z.n$ ، لأن $Z.n$ مجموعة جزئية من A .

ومن ناحية ثانية ، إذا كان a عنصراً ما من A ، فإنه يوجد عدنان صحيحان r, q بحيث يكون :

$$a = q.n + r ; 0 \leq r < n$$

إن $r = 0$ ، وذلك لأنه ، إذا كان $r \neq 0$ ، عندها يكون $r = b - q.n \in A$ ، وهذا مناقض للفرص أن n هو أصغر عدد صحيح موجب من A .

$$a = q.n \in Z.n : \text{ فإن } r = 0 \text{ و } a = q.n + r$$

بما أن $A = Z.n$ ، فإن المثالية A هي مثالية رئيسة في الحلقة $(Z, +, \cdot)$ مولدة بالعدد n . وبما أن أية مثالية A في الحلقة $(Z, +, \cdot)$ هي مثالية رئيسة فيها ، إذن الحلقة $(Z, +, \cdot)$ هي حلقة مثاليات رئيسة .

مبرهنة (5) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ و (S, T, \star) حلقتين أبداليتين ، وإذا كان φ تشاكلاً من R إلى S ، وإذا كانت I مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث يكون $I \neq R$. وإذا كانت J مثالية في الحلقة (S, T, \star) وبحيث يكون $J \neq S$. عندها يتحقق ما يلي :

1- تكون المثالية I في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية أولية ، إذا ، فقط إذا ، كانت المثالية $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) .

2- تكون المثالية I في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية أعظمية ، إذا ، فقط إذا ، كانت المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) .

3- الشرط اللازم والكافي ، لكي تكون المثالية J مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) ، هو أن تكون المثالية $\varphi^{-1}(J)$ مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

4- الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية J مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) ، هو أن تكون المثالية $\varphi^{-1}(J)$ مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

1- نفرض أولاً ، أن المثالية I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولنبرهن أن $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) .

ليكن y, x عنصرين ما من S ، بحيث يكون $x \star y \in \varphi(I)$.

بما أن y, x من S ، فإنه يوجد عنصرين b, a من R ، بحيث يكون :

$$y = \varphi(b) , x = \varphi(a)$$

وبما أن $x \star y \in \varphi(I)$ فإن $\varphi(a) \star \varphi(b) \in \varphi(I)$. وبالتالي يكون $\varphi(a.b) \in \varphi(I)$ ومنه يكون : $a.b \in I$. وبما أن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن أحد العنصرين b, a على الأقل ، ينتمي إلى I . وبالتالي ، فإن أحد العنصرين $y = \varphi(b) , x = \varphi(a)$ ، على الأقل ينتمي إلى $\varphi(I)$. وهذا يعني أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) .

لنبرهن الآن أن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، علماً أن $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) .

من أجل ذلك نفرض أن y, x عنصرين ما من R ، وبحيث يكون $x.y \in I$. بما أن $x.y \in I$ ، فإن $\varphi(x.y) \in \varphi(I)$ ، وهذا يؤدي بسبب أن φ تشاكلاً أن $\varphi(x) \star \varphi(y) \in \varphi(I)$

بما أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) ، فإن أحد العنصرين $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ على الأقل ينتمي إلى $\varphi(I)$ ، وبالتالي فإن أحد العنصرين y, x على الأقل ينتمي إلى I ، إذن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

2- نفرض أولاً أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) ولنبرهن أن المثالية I مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

إن $R \neq I$ ، ومن جهة ثانية ، لا يمكن إيجاد مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I وتختلف عن I وعن R ، وذلك لأنه ، إذا كان غير ذلك ، توجد مثالية I' في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I وبحيث يكون $I' \neq I$ و $I' \neq R$ ، عندها يكون $\varphi(I')$ مثالية في الحلقة (S, T, \star) تحوي $\varphi(I)$ و $\varphi(I) \neq \varphi(I')$ و $\varphi(I) \neq R$ ، وهذا مخالف لفرضنا أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) .

لنبرهن العكس ، أي لنبرهن أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) ،

ليكن x, y عنصرين ما من S ، بحيث يكون $x \star y \in \varphi(I)$.

بما أن x, y من S ، فإنه يوجد عنصرين a, b من R ، بحيث يكون :

$$y = \varphi(b) , x = \varphi(a)$$

وبما أن $x \star y \in \varphi(I)$ فإن $\varphi(a) \star \varphi(b) \in \varphi(I)$. وبالتالي يكون $\varphi(a.b) \in \varphi(I)$ ومنه يكون: $a.b \in I$. وبما أن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن أحد العنصرين a, b على الأقل ، ينتمي إلى I . وبالتالي ، فإن أحد العنصرين $x = \varphi(a) , y = \varphi(b)$ ، على الأقل ينتمي إلى $\varphi(I)$. وهذا يعني أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) .

لنبرهن الآن أن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، علماً أن $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) .

من أجل ذلك نفرض أن x, y عنصرين ما من R ، وبحيث يكون $x.y \in I$. بما أن $x.y \in I$ ، فإن $\varphi(x.y) \in \varphi(I)$ ، وهذا يؤدي بسبب أن φ تشاكلاً أن $\varphi(x) \star \varphi(y) \in \varphi(I)$

بما أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) ، فإن أحد العنصرين $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ على الأقل ينتمي إلى $\varphi(I)$ ، وبالتالي فإن أحد العنصرين x, y على الأقل ينتمي إلى I ، إذن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

2- نفرض أولاً أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) ولنبرهن أن المثالية I مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

إن $R \neq I$ ، ومن جهة ثانية ، لا يمكن إيجاد مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I وتختلف عن I وعن R ، وذلك لأنه ، إذا كان غير ذلك ، توجد مثالية I' في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I وبحيث يكون $I' \neq I$ و $I' \neq R$ ، عندها يكون $\varphi(I')$ مثالية في الحلقة (S, T, \star) تحوي $\varphi(I)$ و $\varphi(I) \neq \varphi(I')$ و $\varphi(I) \neq R$ ، وهذا مخالف لفرضنا أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) .

لنبرهن العكس ، أي لنبرهن أن المثالية $\varphi(I)$ مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) ،

علماً أن I مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

من أجل ذلك، نفرض العكس، أي نوجد مثالية I' في الحلقة (S, T, \star) تحوي $\varphi(I)$ بحيث يكون $I' \neq \varphi(I)$ و $I' \neq S$. عندها تكون $\varphi^{-1}(I)$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي I و $\varphi^{-1}(I) \neq R$ و $\varphi^{-1}(I) \neq I$ ، وهذا مخالف للفرض، بأن المثالية I مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

3- بما أن $\varphi^{-1}(J)$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي نواة التطبيق φ ، وبما أن $J = \varphi(\varphi^{-1}(J))$ ، فمن (1) نجد أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية J مثالية أولية في الحلقة (S, T, \star) هو أن تكون المثالية $\varphi^{-1}(J)$ مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

4- بما أن $\varphi^{-1}(J)$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي نواة φ ، وبما أن $J = \varphi(\varphi^{-1}(J))$ ، فمن (2) نجد أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية J مثالية أعظمية في الحلقة (S, T, \star) هو أن تكون المثالية $\varphi^{-1}(J)$ مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

نتيجة (2) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد، وبفرض أن I مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ تكون I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان :

نفرض أن $x, y \in I$ عنصرين ما من R بحيث يكون : $x.y \in I$.

إذا كان $x \in I$ ، عندها تكون المثالية I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبهذه الحالة يكون قد تمّ المطلوب. أما إذا كان $x \notin I$ ، عندئذٍ يكون : $I + R.x = R$ ، ولنرمز لمحايد الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالرمز 1 ، عندئذٍ يمكن كتابة العنصر x بالشكل :

$$1 = b + a.x$$

$$y = y.b + a.x.y \in I$$

وهذا يعني أن المثالية I أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

نورد الآن بعض الشروط المكافئة لمفهوم المثاليات الأعظمية ، وذلك من خلال المبرهنات التالية :

مبرهنة (6) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت $I \neq R$ مثالية يسارية (يمينية) في R ، عندها الشروط التالية متكافئة :

(1) المثالية اليسارية (اليمينية) I أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(2) من أجل أي مثالية يسارية (يمينية) ، ولتكن J والتي تحقق $I \subseteq J \subset R$ ، يكون $I = J$.

(3) لا توجد مثالية يسارية (يمينية) J بحيث يكون $I \subset J \subset R$.

(4) أيًا كانت المثالية اليسارية (اليمينية) K في الحلقة $(R, +, \cdot)$ والتي تحقق $I \subset J$ ، فيكون $J = R$.

البرهان :

(لنفرض أن M مجموعة المثاليات اليسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ والتي كل منها لا تساوي R) .

(1) \Leftrightarrow (2)

نفرض أن المثالية اليسارية I مثالية أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت J مثالية يسارية في R بحيث يتحقق $I \subseteq J \subset R$ ، عندئذٍ يتحقق $I \in M$ ، وبما أن المثالية اليسارية I أعظمية في M فإن $I = J$ ، وذلك حسب تعريف المثالية الأعظمية .

(2) \Leftrightarrow (3)

نفرض العكس ، أي نفرض أنه توجد مثالية يسارية J في R بحيث يتحقق $I \subset J \subset R$ ، عندها ، حسب (2) يكون $I = J$ ، وهذا غير ممكن ، وبالتالي لا يوجد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية يسارية J بحيث يتحقق $I \subset J \subset R$.

(3) \Leftrightarrow (4)

لنكن K مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث يكون $I \subset K$ ، وهنا نميز ما يلي : إما $K = R$ أو $K \neq R$ ، فإذا كان $K \neq R$ فهذا يناقض الفرض ، وبالتالي ، فإن $K = R$. وإذا كان $K = R$ يتم المطلوب .

(1) \Leftrightarrow (4)

لنكن I_1 مثالية يسارية في R بحيث $I_1 \neq R$ و $I \subseteq I_1$ وإذا كان $I_1 \neq I$ فهذا يناقض الفرض ، أي أن $I = I_1$.
المبرهنة التالية توضح متى تكون المثالية اليسارية $\{0\}$ مثالية أعظمية في أية حلقة .

مبرهنة (7) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما حيث $R \neq \{0\}$ ، عندها تتكافئ الشروط التالية :

- (1) المثالية اليمينية $\{0\}$ مثالية أعظمية في R .
- (2) لا يوجد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثاليات يمينية تختلف عن R و $\{0\}$.
- (3) كل عنصر من R لا يساوي الصفر قابل للعكس من اليمين .
- (4) كل عنصر لا يساوي الصفر قابل للعكس .

تقبل المبرهنة بدون برهان .

ملاحظة (4) :

المبرهنة السابقة تبقى صحيحة من أجل المثاليات اليسارية .

مبرهنة (8) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، و I مثالية في R ، عندها الشرط اللازم والكافي كي تكون المثالية I أعظمية هو أن تكون حلقة القسمة R/I حقلاً .

البرهان :

نفرض أولاً أن المثالية I أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وحسب التمهيدية التالية :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة و $I \neq R$ مثالية في R ، فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون المثالية I أعظمية في R هو أن يتحقق الشرط: لكل $m \notin I$ ، يوجد عنصر x من R حيث $x \cdot m \in I$ - 1. وبالتالي فإن المثالية I تكون أولية في الحلقة R (وبما أنه إذا كانت R حلقة و I مثالية في R ، فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون المثالية I أولية في R هو أن تكون حلقة الخارج R/I حلقة تامة) فإن حلقة القسمة R/I هي حلقة تامة .

ليكن $I \neq a + I \in R/I$ ، ومنه $a \notin I$ ، وبالتالي، فإن $I \subset I + a \cdot R$ ، وحسب الفرض يكون لدينا : $I + a \cdot R = R$ أي يوجد $m \in I$ و $r \in R$ حيث $1 = m + a \cdot r$ ، وهذا يبين لنا أن :

$$1 + I = (m + a \cdot r) + I = (m + I) + (a \cdot r + I) = (a + I)(r + I)$$

أي أن كل عنصر لا يساوي الصفر في الحلقة R/I يملك معكوساً، إذن الحلقة R/I حقل .

برهان العكس :

نفرض الآن أن R/I حقل، عندها يكون $I \neq 1 + I$ وبالتالي، فإن $1 \notin I$ أي أن $I \neq R$ ، ليكن $a \in R$ بحيث $a \notin I$ عندئذٍ : $I \neq a + I \in R/I$ ، وحسب الفرض يوجد $I \neq b + I \in R/I$ حيث أن :

$(a + I)(b + I) = 1 + I$ ، أي أن : $a \cdot b + I = 1 + I$ ، وبالتالي فإن $1 - a \cdot b \in I$ ، ومنه تكون المثالية I أعظمية في الحلقة R .

تعريف المثالية الأصغرية :

لتكن L مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في حلقة ما، ولتكن $(R, +, \cdot)$ حيث أن $R \neq 0$ ، والتي كل منها لا تساوي الصفر، نقول عن المثالية اليسارية (اليمينية) $I \in L$ إنها مثالية أصغرية في R ، إذا كانت I عنصراً أصغرياً في L .
المبرهنة التالية : تقدم لنا بعض الشروط المكافئة لمفهوم المثاليات اليسارية (اليمينية) الأصغرية .

مبرهنة (9) :

لتكن $I \neq 0$ مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ حيث $R \neq 0$ ، عندئذٍ تتكافئ الشروط التالية :

(1) المثالية اليسارية (اليمينية) I أصغرية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(2) إذا كانت J مثالية يسارية (يمينية) من الحلقة $(R, +, \cdot)$ حيث $0 \neq J \subseteq I$ ،

عندها يكون $J = I$.

(3) لا يوجد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية يسارية (يمينية) مثل K بحيث تحقق

$0 \neq K \subset I$.

(4) إذا كانت المثالية اليسارية (اليمينية) F من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، حيث $F \subset I$ ،

عندها يكون $F = 0$.

البرهان :

(1) \Leftrightarrow (2)

لتكن J مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مغايرة للصفر ، ولتكن L مجموعة المثاليات اليسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ المغايرة للصفر ، عندئذٍ $J \in L$ ، وبما أن I عنصر أصغري في L ، وإن $J \subseteq I$ نجد أن $I = J$.

(2) \Leftrightarrow (3)

نفرض أنه توجد مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ولتكن K بحيث $0 \neq K \subset I$ ، عندئذٍ يكون $K \in L$ و $K \subset I$ وهذا غير ممكن حسب الفرض .

(3) \Leftrightarrow (4)

لتكن F مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وبحيث يكون $F \subset I$ ، إذا كان $F = 0$ يتم المطلوب ، أما إذا كان $F \neq 0$ فهذا يناقض الفرض .

(1) \Leftrightarrow (4)

لتكن $F \in L$ حيث $F \subseteq I$ ، وإذا كان $F = I$ ، فإنه يتم المطلوب ، لنفرض الآن أن $F \neq I$ ، وبالتالي حسب الفرض يكون $F = 0$ وهذا غير ممكن ، إذن المثالية

اليسارية I أصغرية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

مبرهنة (10) :

إذا كانت I مثالية يسارية أصغرية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذ إما $I^2 = 0$ أو $I = R \cdot e$ ، حيث e عنصر جامد لا يساوي الصفر .

البرهان :

بما أن I مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن I^2 مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، كما أن $I^2 \subseteq I$.

لنفرض أولاً أن $I^2 \neq 0$ (إذا كان $I^2 = 0$ فيتم المطلوب) ، وهذا يعني أنه يوجد عنصر وليكن a من I بحيث يكون $I \cdot a = 0$ ، لأنه إذا كان $I \cdot b = 0$ ، حيث $b \in I$ ، فإن $I^2 = 0$ ، وهذا غير ممكن . كما أن $I \cdot a$ مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وأن $I \cdot a \subseteq I$ ، وبما أن I مثالية يسارية أصغرية ، فإن $I \cdot a = I$.

لتكن المجموعة :

$$M = \{r : r \in R : r \cdot a = 0\}$$

إن $M \neq \phi$ لأن $0 \cdot a = 0$ ، كما أن M مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، لأنه ، إذا كان y, x عنصرين ما من M ، فإن :

$$(x - y) \cdot a = x \cdot a - y \cdot a = 0$$

أي أن $x - y \in M$. كما أن :

$$(r \cdot x) \cdot a = r \cdot (x \cdot a) = r \cdot 0 = 0$$

لكل r من R ، إذا $r \cdot x \in M$.

إن $I \cap M$ مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وأن $I \cap M \neq I$ ، لأنه ، إذا كان $I \cap M = I$ ، فإن $I \subseteq M$ ، وبالتالي فإن $I \cdot a = 0$ ، وهذا غير ممكن ، وبما أن $I \cap M \subset I$ ، وأن المثالية اليسارية I أصغرية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ينتج من ذلك أن $I \cap M = 0$.

من ناحية ثانية ، بما أن $I \cdot a = I$ ، وأن $a \in I = I \cdot a$ فإنه يوجد عنصر وليكن $e \in I$

حيث $a = e.a$ ، ومنه $e.I = e^2.I$ ، وبالتالي فإن $a = 0$ ($e - e^2$) ، أي أن $e - e^2 \in I \cap M = 0$ ، إذن $e = e^2$ ، وهذا يعني أن e هو عنصر جامد ، كما أن $e \neq 0$ ، بما أن $e \in I$ ، فإن $R.e \subseteq I$ ، وحيث أن I مثالية يسارية أصغرية ، ينتج من ذلك ، أن $I = R.e$.

ثانياً : الحلقات المنتظمة :

بدايةً نعرف المجموع المباشر للمثاليات ، والحد المباشر للمثاليات .
إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وكانت I_i حيث $1 \leq i \leq n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (أو اليمينية) في الحلقة R ، نقول عن المجموع $I = \sum_{i=1}^n I_i$ إنه مجموع

مباشر للمثاليات I_i ، إذا تحقق ما يلي :

لكل x من I ، يكتب العنصر x بصورة وحيدة بالشكل :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

من أجل $x_i \in I_i$ و $1 \leq i \leq n$.

نرمز عادةً للمجموع المباشر للمثاليات I_i ، حيث $1 \leq i \leq n$ ، بالشكل $\bigoplus_{i=1}^n I_i$ ، أو

اختصاراً ، بالشكل $\bigoplus_{i=1}^n I_i$ ، نسمي كل حد I_i حداً مباشراً للمثالية $\sum_{i=1}^n I_i$.

ينتج من التعريف السابق ما يلي :

(a) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما و I_i مجموعة من المثاليات اليسارية في الحلقة

R ، من أجل $1 \leq i \leq n$. عندئذٍ الشروط التالية متكافئة :

(1) المجموع $\sum_{i=1}^n I_i$ هو مجموع مباشر .

(2) إذا كانت $x_i \in I_i$ ، $1 \leq i \leq n$ والتي تحقق $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ عندها يكون $x_i = 0$

حيث $1 \leq i \leq n$.

(3) $I_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n I_j \right) = 0$ حيث $1 \leq i \leq n$ (3)

(b) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما و I مثالية يسارية فيها ، تكون I حداً مباشراً للحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا وُجِدَتْ مثالية يسارية J في الحلقة R ، بحيث يتحقق :

$$R = I \oplus J$$

لنعرف الآن الحلقة المنتظمة :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، نقول عن الحلقة R إنها منتظمة (نظامية) إذا تحقق الشرط التالي :

لكل $x \in R$ ، يوجد عنصر a من R ، بحيث : $x = x.a.x$.

المبرهنة التالية تعطي الشروط المكافئة لمفهوم الحلقة المنتظمة .

مبرهنة (11) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، الشروط التالية متكافئة :

(1) الحلقة $(R, +, \cdot)$ منتظمة .

(2) من أجل أي مثالية يسارية (أو يمينية) رئيسية هي حد مباشر في الحلقة R .

(3) من أجل أي مثالية يسارية (أو يمينية) منتهية التوليد هي حد مباشر في

الحلقة R .

البرهان :

(1) \Leftrightarrow (2)

بفرض أن I مثالية يسارية رئيسية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وهذا يعني أن $I = R.x$ ، وحسب الفرض يوجد عنصر في R ، وليكن a بحيث يكون $x.a.x = x$ ، بوضع $e = a.x$ ، عندها يكون $e = e^2$ و $R.e$ حد مباشر للحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ومنه يكون :

$$I = R.x = R.x.a.x \subseteq R.a.x = R.e$$

ليكن الآن $b \in R.e$ ، عندها يكون $b = r.e$ ، لكل r من R ، أي أن

$$b = r.e = r.a.x \in R.x$$

نستنتج مما سبق أن $R.e = R.x$ ، أي أن $R.x$ حد مباشر في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(3) \Leftrightarrow (2)

لتكن J مثالية يسارية منتهية التوليد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ولتكن $\{b_i\}$ حيث

$$J = \sum_{i=1}^n R \cdot b_i \quad : \text{وبالتالي يكون } i = 1, 2, \dots, n$$

بطريقة الاستقراء الرياضي على n ، نجد أنه من أجل $n = 1$ ، يكون $J = R \cdot b_1$ ، وحسب الفرض ، يكون $J = R \cdot e$.

لفرض الآن أن المبرهنة صحيحة من أجل $n - 1$ ، أي أن :

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} R \cdot b_i + R \cdot b_n$$

وبوضع $I = \sum_{i=1}^{n-1} R \cdot b_i$ ، نجد أن I مثالية يسارية منتهية التوليد ومولدة بـ $n - 1$ عنصراً ، وحسب الفرض الاستقرائي ، فإن $I = R \cdot e$ ، علماً أن $e = e^2$ ، ومنه يكون :

$$J = R \cdot e + R \cdot b_n$$

وبما أن $1 = e + (1 - e)$ ، فإن $b_n = b_n e + b_n (1 - e)$ ، ومنه يكون ، لكل r من R :

$$r b_n = r b_n e + r b_n (1 - e)$$

أي أن :

$$r \cdot b_n \in R \cdot e + R \cdot b_n (1 - e)$$

إذن :

$$R \cdot b_n \subseteq R \cdot e + R \cdot b_n (1 - e)$$

من ناحية ثانية ، لدينا :

$$b_n (1 - e) = b_n - b_n e$$

ولكل r من R يكون :

$$r \cdot b_n (1 - e) = r \cdot b_n - r \cdot b_n e \in R \cdot b_n + R \cdot e$$

أي أن :

$$R.b_n(1 - e) \subseteq R.b_n + R.e$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} R.b_n + R.e &\subseteq R.e + R.e + R.b_n(1 - e) = R.e + R.b_n(1 - e) \\ &\subseteq R.e + R.e + R.b_n = R.e + R.b_n \end{aligned}$$

إذن :

$$R.e + R.b_n = R.e + R.b_n(1 - e)$$

وحسب الفرض، يكون : $R.b_n(1 - e) = R.l$ حيث $l = l^2$ ، وبالتالي :

$$. l.e = 0 \text{ وأن } R.e + R.b_n = R.e + l$$

بوضع $h = (1 - e)l$ نجد أن $h = h^2$ لأن :

$$\begin{aligned} h^2 &= (1 - e)l(1 - e)l \\ &= (l - el)(l - el) = l^2 - lel - el^2 + elee \\ &= l - el = (1 - e)l = h \end{aligned}$$

كما أن $eh = 0 = he$ ، وأن $R.h = R.l$ ، لأنه $h = (1 - e)l \in R.l$ ، أي أن

$$. R.h \subseteq R.l$$

من ناحية ثانية :

$$l.h = l(1 - e)l = l^2 - lel = l \Rightarrow l \in R.h$$

أي أن $R.l \subseteq R.h$ ، نستنتج مما سبق أن $R.l = R.h$. وهكذا نجد :

$$R.e + R.b_n = R.e + R.l = R.e + R.h$$

$$R(e + h) = R.e + R.h \quad \text{لنبرهن أخيراً أن :}$$

لدينا $R(e + h) \subseteq R.e + R.h$ ، ليكن $x \in R.e + R.h$ ، وهذا يعني أن

$$: x = x_1.e + x_2.h \text{ ، وبالتالي}$$

$$(x_1.e + x_2.h)(e + h) = x_1.e + x_1.e.h + x_2.h.e + x_2.h$$

$$= x_1.e + x_2.h = x$$

إذن $(e + h) \in R$ ، أي أن :

$$R(e + h) = R.e + R.h$$

كما أن $(e + h)^2 = e + h$ ، وهذا يبين لنا أن :

$$R(e + h) = R.e + R.h$$

$$J = R.e + R.b_n = R.e + R.h = R(e + h)$$

$$(1) \Leftrightarrow (3)$$

ليكن r عنصراً ما من R ، عندها يكون $R.e = R.r$ ، ومنه $e \in R.r$ وبالتالي ،
فإن $e = x.r$ ، حيث أن x من R ، وبما أن : $R = R.e \oplus R(1 - e)$ ، فإن :
 $R = R.r \oplus R(1 - e)$ ، وبالتالي فإن : $1 = x.r + y(1 - e)$ ، لكل y, x من R ،
أي أن $r = r.x.r + r.y(1 - e)$ ، ومنه :

$$r - r.x.r = r.y(1 - e) \in R(1 - e)$$

$$r - r.x.r = (1 - r.x)r \in R.r = R.e \Rightarrow r = r.x.r$$

ثالثاً : الحلقة الإقليدية **Euclidean Ring** :

من الحلقات المهمة، والتي تلعب دوراً رائداً وعملياً في نظرية الحلقات والحقول،
هي الحلقات الإقليدية .

تعريف الحلقة الإقليدية :

نقول عن الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$ إنها حلقة إقليدية ، إذا وجدت دالة ، ولتكن

$$d : R^* \longrightarrow N$$

$$(1) \quad d(x) \geq 0 \text{ لكل } x \text{ من } R^*$$

$$(2) \quad d(x) \leq d(xy) \text{ لكل } y, x \text{ من } R^*$$

(3) إذا كان $a \in R$ و $b \in R^*$ ، فإنه يوجد عدنان حقيقيان ، r, q بحيث :

$$a = b.q + r \text{ ، إما } r = 0 \text{ أو } d(r) < d(b)$$

الدالة d تسمى عادةً الدالة الإقليدية ، والشرط الأخير (3) يسمى بالقسمة الإقليدية .

مثال (10) :

إن الحلقة التامة $R = (Z[\sqrt{3}], +, \cdot)$ تشكل حلقة تامة .

الحل :

لنعرف أولاً الدالة الإقليدية ، بالشكل :

$$d : R^* \longrightarrow N ; d(x+y\sqrt{3}) = |x^2 - 3y^2|$$

لكل $x + \sqrt{3}y = a$ من R^* .

ولنتحقق الآن من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف السابق :

$$-1 \quad d(a) \geq 0 \text{ ، لكل } a \text{ من } R^*$$

$$-2 \quad \text{لكل } a, b \text{ من } R^* \text{ ، لدينا :}$$

$$d(a) = d(a) \cdot 1 \leq d(a) \cdot d(b) = d(a \cdot b)$$

-3- ليكن a, b من R^* و $b \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \in Z$ ، ويكون $\frac{a}{b} = z + t\sqrt{3}$ حيث

$d \in Q, Z$ ، لنختار الأعداد بحيث يكون $|z-x| \leq \frac{1}{2}$ و $|t-y| \leq \frac{1}{2}$ ، عندها

يكون لدينا :

$$\frac{a}{b} = z + t\sqrt{3} = x + y\sqrt{3} + \left[(z-x) + (t-y)\sqrt{3} \right]$$

أي أن :

$$a = (z + t\sqrt{3})b$$

$$= (x + y\sqrt{3})b + \left[(z-x) + (t-y)\sqrt{3} \right] b$$

$$= q \cdot b + r$$

حيث أن :

$$q = x + y\sqrt{3} \text{ ، } r = \left[(z-x) + (t-y)\sqrt{3} \right] b$$

ويكون :

$$\begin{aligned}
 d(r) &= d\left(\left[(z-x) + (t-y)\sqrt{3} \right] b \right) \\
 &= d\left[(z-x) + (t-y)\sqrt{3} \right] \cdot d(b) \\
 &= \left| (z-x)^2 - 3(t-y)^2 \right| \cdot d(b) \leq \left| \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right| \cdot d(b) \\
 &= \frac{1}{2} d(b) < d(b)
 \end{aligned}$$

بما أن الشروط الثلاثة محققة ، فإن الحلقة التامة $(Z[\sqrt{3}], +, \cdot)$ حلقة إقليدية .
المبرهنة التالية ، تثبت أن كل حلقة إقليدية هي حلقة تامة رئيسية .

مبرهنة (12) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، فإن $(R, +, \cdot)$ هي حلقة تامة رئيسية .

البرهان :

لتكن I مثالية في الحلقة الإقليدية $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن الدالة الإقليدية $d: R^* \rightarrow \mathbb{N}$ ، إذا كان $I = \{0\}$ ، فإن $I = \langle 0 \rangle$ مثالية رئيسية في الحلقة R .
نفرض الآن أن $I \neq \{0\}$ ، وهذا يعني أنه يوجد عنصر $a \in I$ حيث $a \neq 0$ ،
لنختار العنصر a بحيث تكون $d(a)$ أصغر ما يمكن ، لنبرهن أن $I = \langle a \rangle$.
نفرض أن $x \in I$ و $x \neq 0$. وبما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، فإنه يوجد عنصران q, r من R ، بحيث يكون $x = a \cdot q + r$ بحيث يكون $r = 0$ أو $d(r) < d(a)$.
من العلاقة الأخيرة نجد أن : $r = x - a \cdot q \in I$ لأن I مثالية $x, a \in I$ ، $q \in R$ ، إن $r = 0$ ، وهذا يؤدي إلى أن $x = a \cdot q$ ، أي أن $I = \langle a \rangle$.

ملاحظة (5) :

إن عكس المبرهنة السابقة ، بشكل عام ، ليس صحيحاً ، فمثلاً الحلقة التامة الرئيسية $(Z[\sqrt{-19}], +, \cdot)$ ليست حلقة إقليدية .

مفهوم القسمة Divisibility :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، وليكن $a, b \neq 0$ عنصرين في R . نقول إن العنصر

a يقسم b Divides العنصر b ، إذا وُجِدَ عنصر c في R يحقق العلاقة $b = a.c$ ، ونرمز لذلك بـ $a | b$. ونقول في هذه الحالة إن العنصر b يقبل القسمة Divisible على العنصر a في R . إذا كان a غير قاسم لـ b ، فإننا سنرمز لذلك بالرمز $a \nmid b$.

نستنتج من التعريف السابق ما يلي :

لكل c, b, a من R فإن :

- 1- $a | a$ (كل عنصر يقسم نفسه) (الخاصة الانعكاسية) .
- 2- إذا كان $a | b$ و $b | c$ ، فإن $a | c$ (الخاصة المتعدية) .
- 3- إذا كان $a | b$ و $b | a$ ، فإن $a = u.b$ ، حيث u عنصر وحدة في R ، أي أنه قاسم للمحايد في R .
- 4- إذا كان $a | b$ و $a | c$ ، فإن لكل x, y من R ، $a | (xb \pm yc)$.
- 5- إذا كان 1 هو عنصر الوحدة في $(R, +, \cdot)$ ، فإن العناصر القابلة للعكس في R ، هي فقط العناصر التي هي قواسم لـ 1 في R .
- 6- إذا كان 0 هو صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان $a \neq 0$ من R ، وإذا كان لـ a معكوس في R بالنسبة للعملية (\cdot) ، فإن a يقسم أي عنصر من R في R .

مفهوم الترادف (التشارك) Associated :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، نقول عن العنصرين b, a من R^* إنهما مترادفان أو متشاركان ، إذا تحقق الشرط : $a = u.b$ ، حيث أن u هو عنصر الوحدة في الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$. نرمز عادة للعنصرين المترادفين بـ $a \sim b$.

بكلامٍ آخر ، نقول إن العنصر a يترادف مع العنصر b في الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$ إذا كان $a | b$ و $b | a$. (سنبرهن ذلك فيما بعد) .

ويمكن التحقق ، وبسهولة ، أن علاقة الترادف بين العناصر في الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$ تمثل علاقة تكافؤ على R ، لأن :

$$(1) \text{ العلاقة } \sim \text{ انعكاسية (كل عنصر مترادف مع نفسه) ، أي } a \sim a .$$

$$(2) \text{ العلاقة } \sim \text{ تناظرية ، إذا كان } a \sim b \text{ ، فإن } b \sim a .$$

(3) العلاقة \sim متعدية ، أي إذا كان $a \sim b$ و $b \sim c$ ، فإن $a \sim c$.

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، ولنرمز لصفرها بالرمز 0 ، وليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من R ، إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون b, a مترادفان في R هو أن يكون كل من العنصرين b, a قاسماً للآخر في R .

البرهان :

لنفرض أولاً ، أن a يقسم b و b يقسم a في R ، ولنبرهن أن b, a مترادفان في R . بما أن كلاً من العنصرين b, a قاسم للآخر في R ، فإنه يوجد عنصرين c_1 و c_2 من R بحيث يكون :

$$a = b.c_1 , b = a.c_2$$

ومنه يكون :

$$a = a.c_2.c_1 \quad (*)$$

لنرمز للعنصر المحايد في R بالنسبة للعملية (\cdot) بـ 1 ، فمن $(*)$ نجد أن :

$$a(1 - c_2.c_1) = 0$$

ومنه $1 - c_2.c_1 = 0$ أي أن $1 = c_2.c_1$ ، وهذا يعني أن c_2, c_1 قابلان للقلب في R ، وبالتالي ، فإن كلاً من العلاقتين : $b = a.c_2$ و $a = b.c_1$ تبين لنا أن b, a مترادفان في R .

العكس ، واضح حسب التعريف .

تعريف :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، ولنرمز لصفرها بـ 0 . وإذا كان $a \neq 0$ عنصراً من R ، إن العناصر القابلة للعكس في R ومرادفات العنصر a في R تسمى قواسم غير خاصة لـ a في R .

نتيجة (3) :

لكل عنصر غير صفري من حقل ما وليكن $(F, +, \cdot)$ يوجد له عدد غير منته من العناصر المترادفة .

البرهان :

ليكن a عنصراً ما من الحقل F ، بحيث $a \neq 0$ ، يوجد عنصر b لا يساوي الصفر من F بحيث يتحقق $a = u.b$ ومنه يكون : $u = a.b^{-1}$

مثال (11) :

لتكن $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ حلقة تامة ، أثبت أن العنصر $a = \sqrt{3}$ يترادف مع العنصر $3 + 2\sqrt{3}$ في الحلقة التامة المدروسة .

الحل :

بما أن $(2 + \sqrt{3})\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$ ، وبما أن $2 + \sqrt{3}$ هو عنصر الوحدة في الحلقة التامة $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ، لأن :

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

إذن العنصران $\sqrt{3}$ و $3 + 2\sqrt{3}$ مترادفان .

مبرهنة (13) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية دالتها الإقليدية d ، عندها يتحقق ما يلي :

$$(1) \quad d(1) < d(a) \text{ لكل } a \text{ من } R^* \text{ والعنصر } 1 \text{ هو المحايد في } R .$$

$$(2) \quad \text{إذا كان } a, b \text{ من } R^* \text{ مترادفين ، فإن : } d(a) = d(b) .$$

$$(3) \quad d(u) = d(1) \text{ ، إذا فقط إذا ، كان } u \in R^* \text{ عنصر وحدة في } R .$$

البرهان :

1- بما أن $a = 1.a$ ، لكل a من R^* ، فيكون :

$$d(a) = d(a.1) \geq d(1)$$

2- بما أن a, b عنصرين مترادفين من R^* في R ، يوجد $u \in R^*$ بحيث يتحقق

$$a = u.b \text{ ، وبالتالي :}$$

$$d(a) = d(u.b) \geq d(b)$$

وبما أن $b = u^{-1}.a$ فيكون لدينا :

$$d(b) = d(u^{-1}.a) \geq d(a)$$

من المتباينتين السابقتين نجد أن : $d(a) = d(b)$

3- لنبرهن أولاً ، أنه إذا كان $u \in R$ عنصر وحدة ، فإن : $d(u) = d(1)$.

بما أن u عنصر الوحدة في R ، يوجد عنصر $v \in R$ بحيث $u.v = 1$. ومنه يكون:

$$d(u) \leq d(u.v) = d(1) \leq d(v)$$

ومنه يكون :

$$d(u) = d(1)$$

لنبرهن الآن ، على العكس . بما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية يوجد عنصران q, r من R بحيث يكون $1 = u.q + r$ حيث u من R^* و $r = 0$ أو $d(r) < d(u)$. وبما أن $d(1)$ أصغر دالة لعناصر R ، وبما أن $d(u) = d(1)$ فيكون $r = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $1 = u.q$ ، أي أن u عنصر وحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

مبرهنة (14) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، ولنرمز لصفها بـ 0 ، وإذا كان b, a من R^* ، وإذا كان a قاسماً لـ b في R ، وإذا كان $d(a) = d(b)$ فإن b, a مترادفان في R .

البرهان :

بما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، فإنه يوجد من أجل b, a عنصران q, r في R ، بحيث يكون : $a = b.q + r$ و $r = 0$ أو $d(r) < d(b)$.

إن r لا يختلف عن الصفر ، لأنه إذا كان $r \neq 0$ فإن :

$$d(r) < d(b) = d(a)$$

ومن ناحية ثانية بما أن a يقسم b في R ، فإنه بالإمكان إيجاد عنصر c من R ، بحيث يكون $b = a.c$ ، ومن ثم ، فإن :

$$\begin{aligned} a = b.q + r &\Rightarrow r = a - b.a = a - a.c.q \\ &= a(1 - c.q) \end{aligned}$$

حيث 1 هو عنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

العلاقة الأخيرة ، تبين لنا أن a يقسم r في R ، ومن ثم ، فإن $d(a) \leq d(r)$ ، وهذا تناقض . إذن $r=0$ وبالتالي من العلاقة : $a = b.q + r$ نجد أن $a = b.q$ ، وهذا يبين لنا أن b يقسم a في R .

بما أن a يقسم b في R فرضاً ، وبما أن b يقسم a في R (برهاناً) فإن b, a مترادفان في R .

رابعاً : حلقة التحليل الوحيد (Unique factorization domain) :

لدراسة حلقة التحليل الوحيد ، نحتاج إلى المفاهيم التالية : العناصر الأولية والعناصر غير القابلة للتحليل ، والقاسم المشترك الأعظم ، والمضاعف المشترك الأصغر .

1- القاسم المشترك الأعظم Greatest common divisor :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، ولنرمز لصفرها بالرمز o ، وإذا كان b, a عنصرين ما من R^* . نقول عن العنصر m المنتمي إلى R إنه قاسم مشترك أعظم لـ b, a في R ونرمز لذلك بـ (a, b) أو $\gcd(a, b)$ إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$(1) \quad m \text{ قاسم مشترك لـ } b, a \text{ في } R , \text{ أي : } m|a , m|b$$

(2) إذا وجد قاسم مشترك آخر m' لـ b, a في R ، فإن m' يقسم m في R .

ينتج من التعريف السابق ، أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد وصفرها هو o وكان $a, b \in R^*$ و u عنصراً قابلاً للعكس في R ، وإذا كان m هو قاسم مشترك أعظم لـ a و b في R ، فإن العنصر $m.u$ هو ، أيضاً قاسم مشترك أعظم لـ a و b في R .

مبرهنة (15) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، وإذا كان y, x عنصرين من R وغير معدومين ، فإن لـ y, x قاسماً مشتركاً أعظم وليكن z في R من الشكل : $z = \alpha.x + \beta.y$ لكل α, β من R .

البرهان :

$$M = \{q.x + r.y : q, r \in R\}$$

لنأخذ المجموعة $M \neq \emptyset$ ، ويوجد فيها عناصر لا تساوي الصفر ، لأن :

$$0 \neq x = 1.x + 0.b \in M$$

$$0 \neq y = 0.x + 1.b \in M$$

حيث رمزنا لعنصر الوحدة في الحلقة بـ 1 ولصفرها بـ 0 . لنختار من عناصر المجموعة M المختلفة عن الصفر ، العنصر z الذي من أجله يكون $\varphi(z)$ أصغرياً . حيث دالة إقليدية .

بما أن $z \in M$ ، فإن z يكتب بالشكل : $z = \alpha.x + \beta.y$ لكل α, β من R .

(1) لنبرهن أن z هو قاسم مشترك أعظم لـ y,x في R . بما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، فإنه من أجل العنصرين z,x يوجد عنصران t,s من R ، بحيث يكون : $x = z.s + t$ و إما أن يساوي الصفر أو $\varphi(t) < \varphi(z)$. إن t لا يمكن أن يساوي الصفر لأنه إذا كان $t \neq 0$ ، فإن $\varphi(t) < \varphi(z)$ ، ومن ناحية ثانية ، إن :

$$x = z.s + t \Rightarrow t = x - z.s$$

أي أن :

$$T = x - (\alpha.x + \beta.y) = (1 - \alpha.s) . x + (-\beta.s) . y \in M$$

وهذا مخالف لاختيارنا ، من مجموعة العناصر M المختلفة عن الصفر ، العنصر z الذي يكون من أجله $\varphi(z)$ أصغرياً . إذن $t = 0$ ، وبالتالي $x = d.s$ وهذا يبين لنا أن z يقسم x في R .

وبنفس الطريقة يمكن برهان أن z يقسم y في R .

(2) ليكن z' قاسم مشترك آخر لـ y,x في R ، فإن z' يقسم $\alpha.x + \beta.y$ في R ، أي أن z' يقسم z في R .

نستنتج من (1) و(2) أن z هو قاسم مشترك أعظم لـ y,x في R .

2- المضاعف المشترك الأصغر Least common multiple :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان $a, b \in R^*$ ، نقول عن العنصر d إنه مضاعف مشترك أصغر للعنصرين b,a في R ، إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$(1) \quad a|d \text{ و } b|d$$

(2) إذا وُجِدَ $c \in R$ حيث $a|c$ و $b|c$ فإن $d|c$.

نرمز عادةً للمضاعف المشترك الأصغر للعددين a, b في R بالرمز $[a, b]$ أو $\ell \text{ cm } [a, b]$.

3- العناصر الأولية والعناصر غير القابلة للتحويل

Prime and irreducible elements

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، وليكن P عنصراً ما من R ، نقول عن العنصر P إنه أولي Prime إذا تحقق الشرطان التاليان :

(1) $P \neq 0$ و P ليس عنصر وحدة في R .

(2) لكل b, a من R ، إذا كان $P|a \cdot b$ ، فإن $P|a$ أو $P|b$.

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، ولنرمز لصفها بـ 0 ، وإذا كان a عنصراً مغايراً للصفر في R ، نقول إن a غير قابل للتحويل (Irreducible) في R ، إذا تحقق الشرطان التاليان :

(1) $a \neq 0$ و a ليس عنصر وحدة في R .

(2) كل قاسم لـ a في R هو قاسم غير خاص له . أي ، إذا كان c, b عنصريين

ما من R ، بحيث $a = b \cdot c$ ، فإن أحد العنصرين c, b قابل للعكس في R .
بالاستفادة من المفهوم السابق ، نجد أنه :

(1) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، وإذا كان u عنصراً قابلاً للعكس في R ، وإذا فرضنا أن $a \neq 0$ عنصراً من R وغير قابل للتحويل فيها ، فإن العنصر $a \cdot u$ هو أيضاً غير قابل للتحويل في R حيث رمزنا لصف الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 0 .

(2) العنصر الصفري في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، هو عنصر قابل للتحويل ، لأن $0 = 0 \cdot 0$.

مثال (12) :

أي عدد أولي وليكن P في حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ هو عنصر أولي ، وغير قابل للتحويل .

مثال (13) :

بيّن أن العدد 2 عنصر أولي ، لكنه قابل للتحليل في الحلقة (Z_6, \oplus, \otimes) .

الحل :

بما أن $0 \neq 2$ و 2 ليس عنصر وحدة في R . كما أن لكل b, a من Z_6 ، $2|a.b$ ، وبالتالي إما $2|a$ أو $2|b$ إذن 2 عنصراً أولي في Z_6 .

بما أن $2 = 2 \otimes 4$ في حين أن العددين 2 و 4 ليسا عنصري وحدة في الحلقة (Z_6, \oplus, \otimes) ، وبالتالي ، فإن 2 عنصر قابل للتحليل في Z_6 .

مبرهنة (16) :

كل عنصر أولي في أية حلقة تامة هو عنصر غير قابل للتحليل .

البرهان :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، وإذا كان P عنصر أولي من R ، ولنفرض أن b, a من R بحيث $P = a.b$.

إن $P|a.b$ ، وبالتالي إما $P|a$ أو $P|b$ ، لأن P عدد أولي .

إذا كان $P|a$ ، فإنه يوجد عنصر من R ، وليكن d بحيث يكون $a = d.P$ ومنه $P = d.P.b$ ، وبما أن $P \neq 0$ في R ، فإن $d.P = 1$ ، أي أن b عنصر وحدة .

بنفس الطريقة تماماً نجد أنه إذا كان $P|b$ ، فإن a عنصر وحدة .

نستنتج مما سبق أن P عنصر غير قابل للتحليل في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

نتيجة (4) :

يكون العنصر P أولياً في الحلقة التامة الرئيسية $(R, +, \cdot)$ ، إذا ، وفقط إذا ، كان

P عنصراً غير قابل للتحليل فيها .

البرهان :

حسب المبرهنة السابقة، نجد بسهولة أن العنصر الأولي P غير قابل للتحليل في

الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنبرهن الآن، أن P عنصر أولي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، علماً أن P عنصراً غير قابل للتحليل في $(R, +, \cdot)$.

بما أن P غير قابل للتحليل في R فإن $P \neq 0$ وليس عنصر وحدة، وليكن $P|a.b$ لكل a, b من R ، وبالتالي يكون $a.b = d.P$ حيث أن d من R ، وبما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة رئيسية، فإن $\langle a, P \rangle = \langle c \rangle$ حيث أن $c \in R$.

إن $P \in \langle a, P \rangle$ ، وبالتالي $P \in \langle c \rangle$. إذن يوجد $t \in R$ بحيث يكون $P = c.t$ ، وبما أن العنصر P غير قابل للتحليل في R ، فإن c عنصر وحدة أو t عنصر وحدة. فإذا كان c عنصر وحدة في R ، فإننا نجد $\langle a, P \rangle = R$ ، وبالتالي يوجد عنصران x, y من R ، حيث أن $x.a + y.P = 1$ ، ومنه يكون $x.a.b + y.P.b = b$ بما أن $a.b = d.P$ ، فيكون $x.d.P + y.P.b = b$ ، وبالتالي يكون $P|b$.

أما إذا كان t عنصر وحدة في R ، فإن $\langle P \rangle = \langle P.t^{-1} \cdot c \rangle$ ، ويكون $\langle c \rangle \subseteq \langle P \rangle$ ، ومنه يكون $a \in \langle P \rangle$ ، أي أن $P|a$ أي أن P عنصر أولي. المبرهنة التالية تقدم الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية في الحلقة التامة الرئيسية مثالية أعظمية.

مبرهنة (17) :

الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية $\langle P \rangle$ في الحلقة التامة الرئيسية $(R, +, \cdot)$ مثالية أعظمية هو أن يكون العنصر P غير قابل للتحليل في الحلقة R .

البرهان :

نفرض أولاً أن P عنصر غير قابل للتحليل في R ، ولنبرهن أن $\langle P \rangle$ مثالية أعظمية في R ، إذا كان $\langle a \rangle \subseteq \langle P \rangle$ لكل a من R ، يكون $P = a.b$ ، لأجل b من R . إذا كان a عنصر وحدة، فإن $\langle a \rangle = \langle 1 \rangle = \langle R \rangle$ ، أما إذا لم يكن a عنصر وحدة في R ، فيجب أن يكون b عنصر وحدة، وبالتالي يوجد عنصر u من R ، بحيث يتحقق $b.u = 1$ ، وينتج في هذه الحالة أن :

$$P.u = a.b.u = a$$

وبالتالي يكون $\langle a \rangle \subseteq \langle P \rangle$ ، ويكون $\langle a \rangle = \langle P \rangle$.

إذن فرضنا أن $\langle P \rangle \subseteq \langle a \rangle$ يؤدي إما $\langle a \rangle = \langle R \rangle$ أو $\langle a \rangle = \langle P \rangle$.

لكن بما أن $R \neq \langle P \rangle$ أو P عنصر وحدة ، إذن P مثالية أعظمية في R .

لنبرهن العكس ، أي لنبرهن أن P عنصر غير قابل للتحويل ، علماً أن $\langle P \rangle$ مثالية أعظمية .

إذا كان $\langle P \rangle = \langle a \rangle$ ، فإن العنصرين a و P مترادفان في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبالتالي يكون b عنصر وحدة في R . أما إذا كان $\langle P \rangle \neq \langle a \rangle$ فإننا نجد $\langle R \rangle = \langle 1 \rangle = \langle a \rangle$. وبما أن $\langle P \rangle$ مثالية أعظمية في R ، فالعنصران a و 1 مترادفان ، وهذا يعني أن a عنصر وحدة ، وبالتالي فإن P عنصر غير قابل للتحويل في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنأتي الآن لدراسة حلقة التحليل الوحيد .

تعريف حلقة التحليل الوحيد (حلقة تحليل) Unique factorization domain :

نقول عن الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$ إنها حلقة تحليل وحيد ، إذا تحقق الشرطان

التاليان :

1- من أجل أي عنصر a غير معدوم من R وغير قابل للعكس فيها ، يكتب

على شكل جداء عدد منته لعناصر من R ، وكل منها غير قابل للتحويل في R .

2- إذا كان $a \neq 0$ عنصراً من R وغير قابل للعكس فيها ، وإذا تحقق :

$$a = P_1.P_2 \dots P_m = q_1.q_2 \dots q_n$$

حيث أن P_j, q_i من R و $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$ ، وكل منها غير قابل

للتحويل في R ، عندها $m = n$ ، وبتغيير مناسب لترتيب العناصر q_i حيث

$i = 1, 2, \dots, n$ في الجداء $q_1.q_2 \dots q_n$ نحصل على جداء كل عنصر من

العناصر المكونة له مرادف العنصر المقابل له بالترتيب في الجداء $P_1.P_2 \dots P_n$.

بكلام آخر ، إذا كان $a \neq 0$ عنصراً من R وغير قابل للعكس في R ، فإن أي

تحليلين للعنصر a إلى جداء منته من المضاريب كل منها غير قابل للتحويل في R ،

يختلفان احدهما عن الآخر ، فقط بترتيب تلك العناصر ، وبفارق عناصر قابلة للعكس في الحلقة $(R,+,0)$.

المبرهنة التالية تقدم الشرط اللازم والكافي لكي تكون الحلقة التامة حلقة تحليل وحيد .

مبرهنة (18) :

إذا كانت $(R,+,0)$ حلقة تامة ، الشرط اللازم والكافي لكي تكون $(R,+,0)$ حلقة تحليل وحيد ، هو أن يتحقق الشرطان التاليان :

(1) كل عنصر غير معدوم وليكن a من R ، وغير قابل للعكس في R ، هو جداء منته لعناصر من R ، كل منها غير قابل للتحليل في R .

(2) إذا كان $P \neq 0$ عنصراً من R وغير قابل للتحليل فيها ، وإذا كان $x \neq 0$ و $y \neq 0$ عنصران من R بحيث P يقسم $x.y$ في R ، فإن P يقسم واحداً من العنصرين x,y ، على الأقل ، في الحلقة التامة R .

البرهان :

نفرض أولاً ، أن $(R,+,0)$ حلقة تحليل وحيد ، ولنبرهن أن الشرطين (1) و(2) محققان .

نلاحظ أولاً أن الشرط الأول محقق ، وذلك حسب تعريف حلقة التحليل الوحيد . لنبرهن على صحة الشرط الثاني .

بما أن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ عنصران من R ، ولأن $(R,+,0)$ حلقة تامة ، فإن $x.y \neq 0$ ، وبما أن P يقسم $x.y$ في R ، فإنه بالإمكان إيجاد عنصر وليكن z من R على الأقل وبحيث يكون :

$$x.y = P.z \quad (*)$$

إذا كان أحد العنصرين y,x قابلاً للعكس في R ، عندها من العلاقة (*) ينتج أن P يقسم العنصر الآخر في R . أما إذا كان y,x غير قابلين للعكس في R ، عندها يكون العنصر z غير قابل للعكس في R ، وبالتالي ستكون العناصر z,y,x هي

جاء منته لعناصر من R وكل منها غير قابل للتحليل فيها ، ولنفرض مثلاً ، أن :

$$x = x'_1 \cdot x'_2 \cdot \dots \cdot x'_m$$

$$y = x''_1 \cdot x''_2 \cdot \dots \cdot x''_n$$

$$z = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_s$$

حيث أن x'_i و x''_j و y_k عناصر من R ، وكل منها غير قابل للتحليل في R ، كما أن :

$$k = 1, 2, \dots, s ; j = 1, 2, \dots, n ; i = 1, 2, \dots, m$$

وبملاحظة العلاقة (*) نجد أن :

$$x'_1 \cdot x'_2 \cdot \dots \cdot x'_m \cdot x''_1 \cdot x''_2 \cdot \dots \cdot x''_n = P \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_s$$

وبسبب كون $(R, +, \cdot)$ منطقة تامة ، فإن المساواة الأخيرة ، توضح لنا أن P مرادف لأحد العناصر $x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ ، وبالتالي فإن P يقسم أحد العنصرين x, y في R .

برهان العكس ، أي لنثبت أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تحليل وحيد ، علماً أن الشرطان (1) و(2) محققان .

بما أن الشرط الأول في تعريف حلقة التحليل الوحيد محقق فرضاً ، فيكفي أن نبرهن على تحقق الشرط الثاني الوارد في تعريف حلقة التحليل الوحيد .

نلاحظ أولاً أن الشرط الثاني الوارد في تعريف حلقة التحليل الوحيد محقق من أجل أي عنصر من R مختلف عن الصفر وغير قابل للتحليل في R . ولنفرض الآن أن الشرط الثاني محقق من أجل أي عنصر لا يساوي الصفر في R وغير قابل للعكس فيها ، ويمكن تحليله إلى جداء t مضروباً في R وكل منها غير قابل للتحليل فيها ، ولنثبت أن الشرط الثاني الوارد في مفهوم حلقة التحليل الوحيد محقق ، وذلك من أجل كل عنصر من R لا يساوي الصفر ، وغير قابل للعكس في R ، ويمكن تحليله إلى جداء $t + 1$ مضروباً من R وكل منها غير قابل للتحليل في R . من أجل ذلك نفرض أن r عنصراً لا يساوي الصفر من R وغير قابل للعكس فيها ، ولنفرض أيضاً :

$$r = x_1 \cdot x_2 \dots x_{t+1} = c_1 \cdot c_2 \dots c_s$$

حيث أن c_i و P_j عناصر من R وكل منها غير قابل للتحليل فيها، حيث $1 \leq j \leq t+1$ ، $1, 1 \leq i \leq s$.

وبما أن :

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_{t+1} = c_1 \cdot c_2 \dots c_s \quad (*)'$$

فإن P_1 يقسم الجداء $c_1 \cdot c_2 \dots c_s$ في R ، وبالتالي فإن P_1 يقسم واحداً من العناصر c_1, c_2, \dots, c_s ، على الأقل ، في R ، ولنفرض على سبيل المثال أن P_1 يقسم c_1 في R . وبالتالي فإن P_1 و c_1 غير قابلين للتحليل في R ، كما أن P_1 و c_1 مترادفان في R (لأن P_1 يقسم c_1 في R) ، وبالتالي يمكن إيجاد عنصر قابل للعكس وليكن u بحيث يكون :

$$c_1 = P_1 \cdot u \quad (*)''$$

من العلاقتين $(*)'$ و $(*)''$ نجد أن :

$$P_1 \cdot P_2 \dots P_{t+1} = P_1 \cdot u \cdot c_2 \dots c_s$$

ومنه يكون :

$$P_2 \dots P_{t+1} = u \cdot c_2 \dots c_s$$

وبما أن الشرط الثاني الوارد في تعريف حلقة التحليل الوارد محقق ، من أجل كل عنصر لا يساوي الصفر من R وغير قابل للعكس فيها، ويمكن تحليله إلى جداء t مضروباً من R وكل منها غير قابل للتحليل فيها، فإن $c_2 \dots c_s$ ، u ، $P_2 \cdot P_3 \dots P_{t+1}$ ، يختلفان أحدهما عن الآخر بترتيب تلك العناصر ، وبفارق عناصر قابلة للعكس في R . ويأخذ بعين الاعتبار العلاقة $(*)''$ نجد أن الجداثين $P_1 \cdot P_2 \dots P_{t+1}$ و $c_1 \cdot c_2 \dots c_s$ مختلفان عن بعضهما بترتيب تلك العناصر وبفارق عناصر قابلة للعكس في R .

نستنتج مما سبق ، تحقق الشرط الثاني الوارد في تعريف حلقة التحليل الوحيد .

مثال (14) :

إن حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ تشكل حلقة تحليل وحيد ، لأنه من أجل أي

عنصر فيها ، وليكن $x \notin \{0, \pm 1\}$ حيث يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية .

مثال (15) :

كل حقل ، يمكن اعتباره حلقة تحليل وحيد ، لأن أي عنصر فيه لا يساوي الصفر هو عنصر وحدة في هذا الحقل .

نتيجة (5) :

كل حلقة تامة رئيسة هي حلقة تحليل وحيد .

مبرهنة (19) :

كل حلقة إقليدية هي حلقة تحليل وحيد .

البرهان :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ولنرمز لصفرها بـ 0 ولعنصر الوحدة فيها بـ 1 . ولنبرهن أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تحليل وحيد ، أي لنتحقق من الشرطين :

(1) كل عنصر x لا يساوي الصفر من R وغير قابل للعكس فيها ، هو جداء منته لعناصر من R ، كل منها غير قابل للتحليل فيها .

(2) إذا كان $P \neq 0$ عنصراً من R وغير قابل للتحليل فيها ، إذا كان $x_1 \neq 0$ و $y_1 \neq 0$ عنصرين من R بحيث يكون P يقسم $x_1 \cdot y_1$ في R ، فإن P يقسم واحداً من العنصرين y_1, x_1 على الأقل في R . من أجل ذلك :

إن الشرط الأول محقق من أجل العنصر x من R ، إذا كان $\varphi(x) < \varphi(a)$ حيث φ دالة إقليدية (إن المساواة السابقة غير ممكنة إذا كان x عنصراً غير قابل للعكس في R). لنفرض الآن أن الشرط الأول محقق من أجل جميع العناصر a من R ، التي من أجلها تحقق $\varphi(x) < \varphi(a)$ ، ولنبرهن أن الشرط الأول محقق من أجل العنصر x إذا كان x غير قابل للتحليل في R فيكون المطلوب . أما إذا لم يكن x كذلك ، فإنه بالإمكان كتابته بالشكل $x = b \cdot c$ ، حيث أن c, b ليسا مترادفين في R ، وأيضاً x, c ليسا مترادفين في R ، وبالتالي :

$$\varphi(c) < \varphi(x) \quad , \quad \varphi(b) < \varphi(x)$$

إذا كل من c, b هو جداء منته لعناصر من R كل منها غير قابل للتحليل فيها ، وبالتالي، فإن x هو أيضاً جداء منته لعناصر من R كل منها غير قابل للتحليل فيها.

لنبرهن الآن على تحقق الشرط الثاني :

إذا كان $P \neq 0$ عنصراً من R ، وغير قابل للتحليل في R ، وإذا كان $x_1 \neq 0$ و $y_1 \neq 0$ عنصرين من R بحيث أن P يقسم $x_1.y_1$ في R ، وإذا فرضنا أن $P \nmid x_1$ يقسم x_1 في R ، فإن $(P, a_1) = 1$ ، ومن ثم ، فإنه بالإمكان إيجاد عنصرين β, α من R بحيث يكون :

$$1 = \alpha.x_1 + \beta.P$$

وبالتالي يكون :

$$y_1 = y_1.\alpha.x_1 + y_1.\beta.P$$

بما أن P يقسم الجداء $x_1.y_1$ في R ، فإنه يمكن إيجاد عنصر وليكن z_1 من R بحيث يكون : $x_1.y_1 = P.z_1$ ، ومنه يكون :

$$y_1 = (\alpha.z_1 + \beta.y_1).P$$

وهذا يبين لنا أن P يقسم y_1 في R .

(5-3) حقل القواسم Field of Quotients :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ما ، لنبني حقل القواسم على الحلقة التامة السابقة ،

لتكن :

$$X = \{(r, u) : r \in R, u \in R ; u \neq 0\}$$

ولنعرف على X العلاقة \equiv بالشكل :

$$(r, u) \equiv (s, v) \Leftrightarrow r.v = s.u$$

ولنثبت أولاً أن العلاقة \equiv تشكل (تمثل) علاقة تكافؤ على المجموعة X .

من الواضح ، أن $(r', u) \equiv (r', u)$ ، لكل (r', u) من X . أي أن العلاقة \equiv انعكاسية (reflexive) .

إذا كان $(r, u) \equiv (s, v)$ ، فإن $r.v = s.u$ ، وبالتالي فإن : $v.r = u.s$ ، وبذلك يكون

$(r,u) \equiv (s,v)$ ، أي أن العلاقة \equiv تناظرية (symmetric) ، وذلك من أجل
 $(r,u), (s,v) \in X$.

لنبرهن أخيراً ، أن العلاقة \equiv متعدية .

ليكن $(r,u), (s,v), (t,w) \in X$ ، وبحيث يكون :

$$(r,u) \equiv (s,v) \Leftrightarrow r.v = s.u$$

$$(s,v) \equiv (t,w) \Leftrightarrow s.w = v.t$$

بما أن $(R,+, \cdot)$ إبدالية ، فيكون :

$$r.v.w = (s.u).w = u(s.w) = u.t.v$$

وبما أن $v \neq 0$ في الحلقة التامة $(R,+, \cdot)$ ، يكون لدينا $r.w = t.u$ ، وهذا يعني ،
 أن $(r,u) \equiv (t,w)$. إذن العلاقة \equiv متعدية transitive .

نستنتج مما سبق أن العلاقة \equiv هي علاقة تكافؤ على المجموعة X .

لنرمز لفصل التكافؤ للعلاقة \equiv بالرمز $[(r,u)]$ لكل زوج (r,u) في X ، ونكتب
 أحياناً $[(r,u)] = r/u$.

قبل أن نعرف عمليتي الجمع والضرب ، نذكر بأن :

$$[(r,u)] = [(s,v)] \Leftrightarrow (r,u) \equiv (s,v)$$

أو بالشكل التالي (القسمة) :

$$\frac{r}{u} = \frac{s}{v} \Leftrightarrow r.v = s.u \quad (1)$$

ليكن Q مجموعة فصول التكافؤ $[(r,u)]$ حيث $(r,u) \in X$. أي أن :

$$Q = \left\{ \frac{r}{u} : r, u \in R, u \neq 0 \right\}$$

لنعرف الآن عمليتي الجمع (+) والضرب (\cdot) على Q بالشكل :

$$\frac{r}{u} + \frac{s}{v} = \frac{r.v + s.u}{u.v} , \quad \frac{r}{u} \cdot \frac{s}{v} = \frac{r.s}{u.v}$$

ولما كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، و $u \neq 0$ و $v \neq 0$ فإن $u \cdot v \neq 0$. أي أن

$$\frac{r \cdot s}{u \cdot v} \in Q \text{ ، وكذلك } \frac{r \cdot v + s \cdot u}{u \cdot v} \in Q$$

لنبرهن الآن أن الجمع (+) والضرب (·) عمليتان حسنتا التعريف (معرفتان جيداً) .
لنفرض أن $r/u = r'/u'$ و $s/v = s'/v'$ ، ولنثبت أن :

$$\frac{r'v' + s'u'}{u'v'} = \frac{rv + su}{uv}$$

لدينا $sv' = s'v$ ، $ru' = r'u$ (من العلاقة (1)) . ولنثبت أن :

$$u \cdot v (r'v' + s'u') = u'v' (rv + su)$$

لدينا :

$$u \cdot v (r'v' + s'u') = (r'u) v v' + (s'v) u u'$$

$$= r u' v v' + s v' u u' = u' v' (rv + su)$$

بالطريقة نفسها ، يمكن إثبات أن عملية الضرب حسنة التعريف أيضاً .

المبرهنة التالية ، تبرهن أن المجموعة Q مع عمليتي الجمع والضرب السابقتان تشكل حقلاً ، نسمي عادةً هذا الحقل بحقل قواسم الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$.

مبرهنة (20) :

المجموعة Q مع عمليتي الجمع والضرب المعرفة عليها تشكل حقلاً .

البرهان :

لنتحقق من أن عملية الجمع تجميعية على Q :

لتكن $r/u, s/v, t/w \in Q$ ، وبالتالي ، فإن :

$$\frac{r}{u} + \left(\frac{s}{v} + \frac{t}{w} \right) = \frac{r}{u} + \left(\frac{s \cdot w + t \cdot v}{v \cdot w} \right) = \frac{r(v \cdot w) + (s \cdot w + t \cdot v) \cdot u}{u(v \cdot w)}$$

$$\frac{(r \cdot v + s \cdot u) w + t \cdot u \cdot v}{(u \cdot v) w} = \left(\frac{r \cdot v + s \cdot u}{u \cdot v} \right) + \frac{t}{w} = \left(\frac{r}{u} + \frac{s}{v} \right) + \frac{t}{w}$$

وبالطريقة نفسها ، نثبت أن عملية الضرب تجميعية على Q أيضاً . كما ، يمكن التأكد من أن عمليتي الجمع والضرب على Q عمليتان إبداليتان . ونلاحظ ، أن $\frac{0}{u} = [0, u]$ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع ، وأن $-r/u$ هو المعكوس الجمعي للعنصر r/u ، وبالتالي ، فإن $(Q, +)$ تشكل زمرة إبدالية .
لكل s/v من Q ، فإن :

$$\frac{r}{r} \cdot \frac{s}{v} = \frac{r.s}{r.v} = \frac{s}{v}$$

وبالتالي ، فإن r/r يشكل المحايد بالنسبة لعملية الضرب .
يمكن التحقق بسهولة أن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع .
ليكن r/u عنصراً غير صفري من Q ، فيكون $r \neq 0$ ، ولذلك ، فإن $r/u \in Q$ ، وبالتالي ، فإن :

$$\frac{r}{u} \cdot \frac{u}{r} = \frac{r.u}{u.r} = \frac{r.u}{r.u} = 1$$

وبما أن $r.u \neq 0$ ، فإن $\frac{r.u}{r.u}$ هو العنصر المحايد ، لذلك فإن $(r/u)^{-1} = u/r$.
وهكذا ، فإن $(Q, +, \cdot)$ حقل .

نستنتج مما سبق أن $(Q, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد .
قبل أن نقدم مبرهنة الغمر ، نعرّف الحلقة المغمورة .
تعريف :

لتكن $(R, +, \cdot)$ و $(R', +, \cdot)$ حلقتين ما ، نقول إن الحلقة $(R', +, \cdot)$ مغمورة Imbedded في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا وجدت حلقة جزئية من R تشاكل الحلقة $(R', +, \cdot)$.

مبرهنة الغمر (21) Embedding theorem :

كل حلقة تامة يمكن غمرها بحقل قواسمها .

البرهان :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة، وليكن $(F, +, \cdot)$ حقل قواسمها وإذا عرفنا التطبيق :

$$\Psi: R \longrightarrow F$$

$$\Psi(r) = r/1 ; r \in R [r, 1] = r/1$$

لنثبت أن التطبيق Ψ تشاكل :

$$\Psi(r + s) = (r + s)/1 = r/1 + s/1 = \Psi(r) + \Psi(s)$$

$$\Psi(r \cdot s) = (r \cdot s)/1 = r/1 \cdot s/1 = \Psi(r) \cdot \Psi(s)$$

إذن التطبيق Ψ تشاكلاً .

ولنثبت أن Ψ متباين :

إذا كان $\Psi(r) = \Psi(s)$ أي أن $r/1 = s/1$ فإن $r = s$ ، وبالتالي فإن Ψ متباين .
كما أن Ψ شامل (ينتج ذلك من تعريف التطبيق Ψ) .

نستنتج مما سبق أن $R \cong \Psi(R) = F$.

مثال (16) :

إذا كانت الحلقة $(Z, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة ، فإن حقل الأعداد النسبية $(Q, +, \cdot)$ هو حقل القواسم للحلقة $(Z, +, \cdot)$.

ملاحظة (2) :

كما في نظرية الزمر ، يمكن برهان أن التطبيق Ψ متباين بالطريقة التالية :

ليكن $a \in \text{Ker } \Psi$ ، فإن $\Psi(a) = 0$ ، وبالتالي ، فإن $\psi(a) = \frac{0}{1}$ ، ومن جهة

ثانية $\psi(a) = \frac{a}{1}$ ، وبالتالي يكون $\frac{a}{1} = \frac{0}{1} \Rightarrow a = 0$ ، أي أن $\text{Ker } \Psi = \{0\}$ ،

أي أن Ψ متباين .

ملاحظة (3) :

يمكن كتابة كل عنصر r/u في Q بالصيغة التالية :

$$\frac{r}{u} = \frac{r}{1} \cdot \frac{1}{u} = \frac{r}{1} \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^{-1} = r \cdot u^{-1} ; r \in R , u \in R^*$$

لأن كل حلقة تامة تغمر في حقل قواسمها ، وبالتالي ، فإنه يمكن مطابقة كل عنصر $a \in R$ مع صورته $a/1$ في Q ، لذلك نعتبر أن $(R, +, \cdot)$ حلقة جزئية من حقل قواسمها $(Q, +, \cdot)$.

نتيجة (6) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، إن أي حقل ، وليكن $(F, +, \cdot)$ يحوي R سيحوي حقل قواسمها .

البرهان :

ليكن $r \cdot u^{-1} \in Q$ ، وبالتالي ، فإن $r, u \in R$ و $u \neq 0$ ، لذلك ، فإن $r, u \in F$ ، وبما أن u عنصر غير صفري ، إذن $u^{-1} \in F$ ، وهكذا ، فإن $r \cdot u^{-1} \in F$ ، وبالتالي ، فإن $F \supset Q$.

مثال (17) :

إذا كان $(R, +, \cdot)$ و $(R', +, \cdot)$ حلقتين تامتين ، وكان $(F, +, \cdot)$ و $(F', +, \cdot)$ حقلين قواسمهما على الترتيب ، وإذا كان Ψ تشاكلاً من R إلى R' ، عندئذ يوجد تشاكل ϕ من F إلى F' بحيث يكون قيد (restriction) التطبيق ϕ على R يساوي Ψ .
الحل :

لنعرف التطبيق $\phi : F \longrightarrow F'$ بالشكل :

$$\phi(a \cdot b^{-1}) = \Psi(a) \cdot \Psi(b^{-1}) ; a \cdot b^{-1} \in F$$

بما أن $b \neq 0$ و Ψ تشاكل ، فإن $\Psi(b) \neq 0$.

لنثبت أولاً ، أن التطبيق ϕ حسن التعريف ، من أجل ذلك ، نفرض $a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}$ ، وبالتالي ، فإن $a \cdot d = c \cdot b$. كذلك ، فإن $\Psi(a \cdot d) = \Psi(c \cdot b)$ ، وهذا يعني أن :

$$\Psi(a) \cdot \Psi(d) = \Psi(c) \cdot \Psi(b)$$

أي أن :

$$\Psi(a) \cdot (\Psi(b))^{-1} = \Psi(c) \cdot (\Psi(d))^{-1}$$

أي أن :

$$\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(c \cdot d^{-1})$$

إذن φ حسن التعريف .

لنبرهن أن φ تشاكلاً .

1- إذا كان $a \cdot b^{-1}, c \cdot d^{-1} \in F$ ، عندئذ ، يكون :

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}) &= \varphi[(a \cdot d + c \cdot b) (b^{-1} \cdot d^{-1})] = \varphi[(a \cdot d + b \cdot c) (d \cdot b)^{-1}] \\ &= \Psi(a \cdot d + b \cdot c) (\Psi(d \cdot b))^{-1} \\ &= (\Psi(a) \cdot \Psi(d) + \Psi(b) \cdot \Psi(c)) + (\Psi(d) \cdot \Psi(b))^{-1} \\ &= (\Psi(a) \cdot (\Psi(b))^{-1} + \Psi(c) (\Psi(d))^{-1}) \\ &= \varphi(a \cdot b^{-1}) + \varphi(c \cdot d^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi[(a \cdot b^{-1}) (c \cdot d^{-1})] &= \varphi[(a \cdot c (bd)^{-1}] = \Psi(ac) [\Psi(bd)]^{-1} \quad -2 \\ &= \Psi(a) \Psi(c) (\Psi(b) \Psi(d))^{-1} \\ &= \Psi(a) \Psi(c) (\Psi(d))^{-1} (\Psi(b))^{-1} \\ &= (\Psi(a) \cdot (\Psi(b))^{-1} \cdot \Psi(c) \cdot (\Psi(d))^{-1}) \\ &= \varphi(a \cdot b^{-1}) \cdot \varphi(c \cdot d^{-1}) \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق أن φ تشاكلاً .

لنبرهن الآن أن φ متباين (أحادي) .

ليكن $\varphi(a \cdot b^{-1}) = 0$ ، وهذا يعني أن $\Psi(a) \cdot (\Psi(b))^{-1} = 0$ ، أي أن $\Psi(a) = 0$ ، لأن $b \neq 0$ ، وبما أن Ψ متباين ، إذن $a = 0$ أي أن $a \cdot b^{-1} = 0$ ، ومنه ينتج أن φ متباين .

لنثبت أخيراً أن φ شامل .

ليكن $c \cdot d^{-1} \in F'$ حيث أن $c, d \in R'$ و $d \neq 0$ ، وهذا يعني أنه يوجد $a \in R$ و $b \in R^*$ بحيث يكون $\Psi(a) = c$ ، $\Psi(b) = d$. وبالتالي، فإن $c \cdot d^{-1} = \varphi(a \cdot b^{-1})$ ، أي أن φ شامل .

نستنتج مما سبق أن $F \cong F'$.

(3-6) أساس جاكبسون وجذر المثالية Jacobsom Basis & Ideal radical

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، نسمي تقاطع جميع المثاليات اليسارية (اليمينية) في الحلقة R بأساس جاكبسون للحلقة R ، ونرمز له عادةً بـ $J(R)$.

بما أن تقاطع مثاليات هي مثالية ، فإن $J(R)$ مثالية يسارية في R ، كما أنه ، إذا كان $R \neq 0$ ، فإن $J(R) \neq R$.

نسمي تقاطع جميع المثاليات الأولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، بالأساس الأولي للحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ونرمز له عادةً بـ $\text{rad}(R)$ ، أو نسميه جذر الحلقة R . بما أن تقاطع أسرة من المثاليات في الحلقة R هي مثالية ، فإن $\text{rad}(R)$ هي مثالية أيضاً في R .
نقدم الآن ، بعض خواص أساس جاكبسون وجذر مثالية ، من خلال المبرهنات التالية :

مبرهنة (22) :

إذا كان x عنصراً ما من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ الشروط التالية متكافئة :

$$(1) \quad x \in J(R) .$$

(2) لكل $y \in R$ ، إن $1 - y.x$ عنصر قابل للعكس من اليسار في الحلقة R .

البرهان :

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

بما أن $x \in J(R)$ ، فإن x ينتمي إلى جميع المثاليات اليسارية الأعظمية في الحلقة R . ليكن I مثالية يسارية أعظمية في الحلقة R ، بما أن $x \in I$ ، فإن أي عنصر وليكن y من R يكون $y.x \in I$ ، وبالتالي فإن $1 - y.x \notin I$ ، ومنه $1 - y.x$ قابل للعكس من اليسار في الحلقة R .

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

نفرض العكس ، أي نفرض وجود مثالية يسارية أعظمية ولتكن K في R حيث $x \notin K$ ، ومنه $K + R.x = R$ ، وبالتالي يوجد عنصر من R وليكن y_0 بحيث

يكون $1-y_0.x \in K$ ، وهذا يبين لنا أن العنصر $1-y_0.x$ غير قابل للعكس من اليسار في R ، وهذا يناقض الفرض، وبالتالي، فإن $x \in K$ ، أي أن العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات اليسارية الأعظمية في R ، إذن $x \in J(R)$.
تهدف المبرهنة التالية إلى تقديم العلاقة بين العناصر عديمة القوى والأساس الأولي للحلقة $(R, +, \cdot)$.

مبرهنة (23) :

ليكن x عنصراً ما من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ الشروط التالية متكافئة :

$$(1) \quad x \in \text{rad}(R)$$

$$(2) \quad \text{العنصر } x \text{ عديم القوى .}$$

البرهان :

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

لنفرض أن x ليس عديم القوى، باستخدام النتيجة التالية [(سنبرهنها في القسم العملي)]: إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وإذا كان $x \in R$ عنصراً ليس عديم القوى، عندئذٍ يوجد في الحلقة R مثالية أولية لا يحوي العنصر a]. توجد مثالية أولية P في الحلقة R ، حيث $x \notin P$ ، وبالتالي، فإن $x \in \text{rad}(R)$ ، وهذا يناقض كون العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات الأولية في R .
نستنتج مما سبق أن العنصر x عديم القوى.

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

بما أن x عنصر من R معدوم القوى، فيوجد n من N بحيث يكون $x^n = 0$ ، إذا كان P مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ يكون $x^n \in P$ ، وبما أن المثالية P أولية فإن $x \in P$. نستنتج مما سبق أن العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات الأولية في R ، إذن $x \in \text{rad}(R)$.
نتيجة (7) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، عندئذٍ من أجل كل عنصر $x \in \text{rad}(R)$ يكون كلاً من العنصرين $1-x$ و $1+x$ قابل للعكس في الحلقة R .

مبرهنة (24) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، عندئذٍ القضايا التالية محققة :

(1) $J(R)$ مثالية يمينية في الحلقة R .

(2) $J(R)$ مثالية في الحلقة R .

(3) لكل $a \in J(R)$ ، فإن $1 - a$ قابل للعكس في الحلقة R .

(4) $J(R)$ أكبر مثالية في الحلقة R تحقق الشرط $a \in J(R)$ ، فإن $1 - a$ ، قابل

للعكس في R .

(5) $x \in J(R)$ إذا ، فقط إذا كان ، لكل $y \in R$ ، فإن $1 - y.x$ قابل للعكس

في الحلقة R .

(6) $J(R)$ هي تقاطع جميع المثاليات اليمينية الأعظمية في الحلقة R .

البرهان :

حسب تعريف $J(R)$ ، إن $J(R)$ مثالية يسارية في R . ليكن $r \in J(R)$ ، حسب

المبرهنة قبل الأخيرة ، لكل $t \in R$ فإن $1 - t.r$ قابل للقلب من اليسار في الحلقة R ،

وبالتالي يوجد u من R بحيث $u.(1 - t.r) = 1$ ، وهذا يؤدي إلى أن :

$$. u = 1 + u.t.r$$

أي أن :

$$(1 + r.u.t)(1 - r.t) = 1 - r.t + r.u.t - r.u.t.r.t$$

$$= 1 + r.u.t - r(1 + u.t.r).t$$

$$= 1 + r.u.t - r.u.t = 1$$

وهذا يعني أن العنصر $1 - r.t$ قابل للعكس من اليسار .

لنبرهن أن $r.t \in J(R)$.

لدينا أياً كان $a \in R$ ، فإن $a.r \in J(R)$ ، وبالتالي ، لكل $t \in R$ ، فإن $1 - (a.r)t$ ،

قابل للعكس من اليسار في R ، وبالتالي $1 - a(r.t)$ قابل للعكس من اليسار ، ومنه

يكون $r.t \in J(R)$.

نستنتج مما سبق أن $J(R)$ مثالية يمينية في الحلقة R .

(2) من التعريف ومن (1) نجد أن (2) محققة .

(3) ليكن $a \in J(R)$ ، فإن العنصر $1-a$ قابل للعكس من اليسار في الحلقة R وبالتالي يوجد عنصر u من R ، بحيث $u(1-a) = 1$ ، أي أن $u - u.a = 1$ ، وبما أن $J(R)$ مثالية في الحلقة R ، فإن $1-u = -u.a \in J(R)$ ، وبالتالي ، العنصر $1-(1-u) = u$ ، قابل للعكس من اليسار ، وهذا يؤدي إلى وجود عنصر v من R ، بحيث $v.u = 1$ ، أي أن :

$$v = v.1 = v.u(1-a) = 1-a$$

وبالتالي ، فإن $(1-a).u = 1$ ، أي أن $1-a$ عنصر قابل للعكس من اليمين ، إذن العنصر $1-a$ قابل للعكس في الحلقة R .

(4) لتكن K مثالية في الحلقة R ، بحيث $1-b$ قابل للعكس في R ، لكل b من R ، ولنثبت أن $K \subseteq J(R)$.

ليكن $a \in K$ ، عندها لكل $r \in R$ يكون $r.a \in K$ ، وبالتالي ، فإن $1-r.a$ قابل للعكس في الحلقة R ، أي أن $1-r.a$ قابل للعكس من اليسار في الحلقة R ، إذن $a \in J(R)$ ، إذن $K \subseteq J(R)$.

(5) إذا كان $x \in J(R)$ ، فإنه لكل عنصر y من R يكون $y.x \in J(R)$ ، وحسب الشرط (3) يكون $1-y.x$ قابل للعكس في الحلقة R . إن برهان العكس ينتج مباشرة من المبرهنة قبل الأخيرة.

(6) الشرط السادس ينتج مباشرة من الشروط السابقة ومن المبرهنة قبل السابقة.

تعريف الصغير :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت I مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة R . نقول عن I إنها صغير في الحلقة R ، إذا تحقق الشرط التالي : من أجل أية مثالية يسارية (يمينية) أخرى ولتكن J من R بحيث $J + I = R$ فإن $J = R$.

من التعريف السابق ، ينتج أنه في أية حلقة $(R, +, \cdot)$ المثالية الصفرية هي مثالية صغير في الحلقة R .

يمكن بسهولة برهان ما يلي :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت I, J مثاليتين يساريتين أو (يمينيتين) في الحلقة R ، فإن :

1- المثالية اليسارية (اليمينية) $I + J$ هي صغير في الحلقة R .

2- إذا كانت I صغير في R و K مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة R حيث $K \subseteq I$ ، عندها K صغير في الحلقة R .

3- $J(R)$ مثالية يسارية (يمينية) صغير في الحلقة R .

4- الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية اليسارية (اليمينية) F صغير في R هو أن يكون $F \subseteq J(R)$.

5- إن $J(R)$ أكبر مثالية يسارية (يمينية) صغير في الحلقة R .

مبرهنة (25) :

إذا كانت $\varphi : R \longrightarrow S$ تشاكلاً غامراً ، عندئذ يتحقق ما يلي :

(1) بفرض أن I مثالية يسارية (يمينية) صغيراً في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن $\varphi(I)$ مثالية يسارية (يمينية) صغيراً في الحلقة $(S, +, \cdot)$.

$$\varphi(J(R)) \subseteq J(S) \quad (2)$$

البرهان :

1- إذا كان J مثالية يسارية في الحلقة $(S, +, \cdot)$ بحيث $\varphi(I) + J = S$ ولنبرهن أن $I + \varphi^{-1}(J) = R$.

ليكن r عنصراً من الحلقة R ، وبالتالي ، فإن $\varphi(r) \in S = \varphi(I) + J$ ومنه $\varphi(r) = \varphi(y) + x$ حيث x من J و y من I ، وبالتالي ، فإن $\varphi(r - y) = x$ ومنه $r - y \in \varphi^{-1}(J) + I$ ، أي أن $r \in \varphi^{-1}(J) + I$ ، ومنه $R \subseteq \varphi^{-1}(J) + I$. وبما أن

$$I + \varphi^{-1}(J) = R, \text{ فإن } \varphi^{-1}(J) + I \subseteq R$$

بما أن المثالية I صغيراً في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن $\varphi^{-1}(J) = R$ أي أن $S = \varphi(R) \subseteq J$ ، أي أن $S = J$ ، وبالتالي المثالية اليسارية $\varphi(I)$ صغيراً في الحلقة $(S, +, \cdot)$.

2- إن المثالية اليسارية $J(R)$ صغير في R ، وحسب الشرط الأول (السابق) يكون $\varphi(J(R)) \subseteq J(S)$.

الفصل الرابع

حلقه كثيرات الحدود

Ring of polynomials

الفصل الرابع

حلقة كثيرات الحدود Ring of polynomials

درسنا في المرحلة الثانوية مفهوم كثيرة الحدود ، والعمليات الجبرية عليها ، وبعض طرق تحليلها ، كما تمت دراسة الاتصال والاشتقاق والتكامل لكثيرات الحدود . وسنبين في هذا الفصل أن كثيرات الحدود هي عناصر من حلقة ، وسندرس بعض الخواص الجبرية لهذه الحلقة .

ترتبط حلقة كثيرات الحدود بحل معادلات حتى الدرجة الرابعة ارتباطاً وثيقاً .

(1-4) تعاريف ومفاهيم أساسية Difination's :

نذكر أولاً القارئ الكريم ، بمفهوم كثيرة الحدود .

كثيرة الحدود ، هي دالة من الشكل : $R : R \longrightarrow R$ معرفة بـ :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

أو بالشكل $P_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$. حيث أن المتحول x والمعاملات a_i ،

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ تنتمي إلى R أو إلى C حيث C مجموعة الأعداد المركبة .

من المفهوم السابق ، نرى أن كثيرة الحدود ، يمكن التعبير عنها بالمتتابعة (والتي هي جملة من المعاملات) : $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$.

سنعمم مفهوم كثيرة الحدود ، وذلك بأن نستعيز عن مجموعة الأعداد الحقيقية R بحلقة ما .

لكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولنرمز لصفرها بـ 0 ، نسمي كل متوالية من الشكل :

$$P = (a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

حيث أن $a_i \in R$ من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

وحيث أن جميع حدود المتوالية بدءاً من حد معين ، معدومة ، بكثيرة حدود على الحلقة $(R, +, \cdot)$ (لا نقصد هنا أن R مجموعة الأعداد الحقيقية) .

إذا كانت جميع المعاملات a_i حيث أن $i = 0, 1, \dots, n$ أصفاراً ، فإن P تسمى بكثيرة حدود صفرية على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ونكتب $P(x) = 0$.

نسمي كثيرة حدود واحدة (Monit polynomial) إذا كان معامل a_n يساوي الواحد . فمثلاً كثيرة الحدود $P_3(x) = 2x^3 - 4x + 5$ ليست واحدة ، بينما كثيرة الحدود : $P_7(x) = x^7 - 6x^3 + x - 1$ كثيرة حدود واحدة .

إذا كانت $P = (a_n)$ و $Q = (b_n)$ كثيرتي حدود على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإننا نقول ، إن $P = Q$ ، إذا كان $a_n = b_n$ ، لكل $n = 0, 1, 2, \dots$.

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولنرمز لصفرها بـ 0 ، وليكن $P = (a_n) \neq 0$ كثيرة حدود على الحلقة R ، إذا كان n أكبر عدد صحيح من أجله يكون $a_n \neq 0$ ، فإننا نسمي n بدرجة كثيرة الحدود P ، ونرمز لذلك بـ $\deg P_n(x) = n$. نسمي عادةً العناصر a_0, a_1, \dots, a_n بمعاملات كثيرة الحدود .

يصطلح ، عادةً ، على اعتبار أن درجة كثيرة الحدود الصفري تساوي $-\infty$.

لنعرف الآن عمليتي الجمع والضرب على المجموعة P في الحلقة $(R, +, \cdot)$ التالية:

$$P = \{f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) ; a_i \in R\}$$

بالشكل التالي :

$$f + g = (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

$$f \cdot g = (a_n) \cdot (b_n) = (r_n) ; r_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j$$

$$\text{لكل } n = 0, 1, 2, \dots , g = (b_n) , f = (a_n)$$

ملاحظة (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد (عنصرها المحايد هو 1) ولنرمز لصفرها بـ 0 ، ولنعتبر ، أنه لا فرق بين أي عنصر a من الحلقة R وكثيرة الحدود $(a, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ ، وإذا رمزنا لكثيرة الحدود $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ بالرمز x ، عندئذٍ

يكون :

$$x^2 = (0,0,1,0,\dots,0,\dots)$$

$$x^3 = (0,0,0,1,0,\dots,0,\dots)$$

وبصورة عامة ، إذا كان t عدداً صحيحاً غير سالب ، فإن :

$$x^t = (c'_n) ; c'_t = 1, c'_n = 0 \text{ لكل } n \neq t$$

مبرهنة (1) بناء حلقة كثيرات الحدود Construct the ring of polynomials

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن S مجموعة كل كثيرات الحدود على الحلقة R ، وإذا كانت Δ, \star عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على المجموعة S بالشكل :

$$(a_n) \star (b_n) = (a_n + b_n) \text{ لكل } (a_n), (b_n) \text{ من } S$$

$$(a_n) \Delta (b_n) = (r_n) ; r_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j , n = 0, 1, 2, \dots$$

عندئذ يتحقق ما يلي :

(1) (S, \star, Δ) حلقة ، وإذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد فإن الحلقة (S, \star, Δ) بمحايد أيضاً .

(2) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، فإن (S, \star, Δ) حلقة تامة أيضاً .

البرهان :

(1) من الواضح أن (S, \star) زمرة إبدالية ، عنصرها المحايد هو كثير الحدود الصفري ، ومعكوس أي عنصر من S وليكن (a_n) هو $(-a_n)$ حيث أن $-a_n$ هو معكوس a_n في R بالنسبة لعملية الجمع $(+)$.
لنبرهن أن العملية Δ تجميعية على عناصر S .

إذا كان $(a_n), (b_n), (c_n)$ ثلاثة عناصر من S ، وإذا وضعنا :

$$(a_n) \Delta [(b_n) \Delta (c_n)] = [(a_n) \Delta (b_n)] \Delta (c_n)$$

$$(a_n) \Delta (c_n) = (w_n) \text{ \& } (a_n) \Delta (w_n) = (u_n)$$

عندئذ ، من أجل كل عدد صحيح $n \geq 0$ ، يكون لدينا :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{i+q=n} a_i \cdot w_q = \sum_{i+q=n} a_i \cdot \left(\sum_{j+k=q} b_j \cdot c_k \right) \\
 &= \sum_{i+q=n} \sum_{j+k=q} a_i \cdot (b_j \cdot c_k) = \sum_{i+q=n} \sum_{j+k=q} a_i \cdot b_j \cdot c_k \\
 &= \sum_{i+j+k=n} a_i \cdot b_j \cdot c_k
 \end{aligned} \tag{1}$$

وبوضع :

$$(r_n) \Delta (c_n) = (v_n) , (a_n) \Delta (b_n) = (r_n)$$

عندها ، من أجل كل عدد صحيح $n \geq 0$ ، يكون لدينا :

$$\begin{aligned}
 v_n &= \sum_{h+k=n} r_h \cdot c_k = \sum_{h+k=n} \left(\sum_{i+j=h} a_i \cdot b_j \right) \cdot c_k \\
 &= \sum_{h+k=n} \sum_{i+j=h} (a_i \cdot b_j) \cdot c_k = \sum_{h+k=n} \sum_{i+j=h} a_i \cdot b_j \cdot c_k \\
 &= \sum_{i+j+k=n} a_i \cdot b_j \cdot c_k
 \end{aligned} \tag{2}$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد أن $u_n = v_n$ ، لكل $n = 0, 1, 2, \dots$ ، وبالتالي فإن :
 $(u_n) = (v_n)$ ، أي أن :

$$(a_n) \Delta (w_n) = (r_n) \Delta (c_n)$$

ومنه يكون :

$$(a_n) \Delta [(b_n) \Delta (c_n)] = [(a_n) \Delta (b_n)] \Delta (c_n)$$

لنبرهن الآن ، على تحقق قانوني التوزيع .

العمليتان \star, Δ ترتبطان فيما بينهما بقانوني التوزيع ، وذلك ، لأنه : إذا كانت
 $(a_n), (b_n), (c_n)$ ثلاثة عناصر من S ، وإذا وضعنا :

$$(a_n) \Delta [(b_n) \Delta (c_n)] = (a_n) \Delta (b_n + c_n) = (S_n)$$

$$(a_n) \Delta (b_n) = (r_n) , (a_n) \Delta (c_n) = (t_n)$$

عندها يكون من أجل كل عدد صحيح $n \geq 0$ ، يكون :

$$S_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot (b_j + c_j) = \sum_{i+j=n} (a_i \cdot b_j + a_i \cdot c_j)$$

$$= \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j + \sum_{i+j=n} a_i \cdot c_j = r_n + t_n$$

$(S_n) = (r_n + t_n)$ وبالتالي يكون :

$(S_n) = (r_n) \star (t_n)$ أي أن :

ومنه يكون :

$$(a_n) \Delta [(b_n) \star (c_n)] = [(a_n) \Delta (b_n)] \star [(a_n) \Delta (c_n)]$$

وبالطريقة ذاتها ، يمكن البرهان على أن :

$$[(b_n) \star (c_n)] \Delta (a_n) = [(b_n) \Delta (a_n)] \star [(c_n) \Delta (a_n)]$$

نستنتج مما سبق أن : (S, \star, Δ) حلقة .

(2) نفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا رمزنا لعنصر الوحدة فيها بـ 1 ، فإن المتوالية (I_n) حيث أن : $I_0 = 1, I_n = 0, n \neq 0$ هي عنصر الوحدة في الحلقة (S, \star, Δ) .

(3) لنبرهن الآن ، أن (S, \star, Δ) حلقة تامة ، علماً أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة .

برهنا سابقاً أن (S, \star, Δ) حلقة بمحايد ، ولنبرهن أنها إبدالية .

ليكن $(a_n), (b_n)$ عنصرين ما من الحلقة (S, \star, Δ) ، وبوضع :

$$(a_n) \Delta (b_n) = (r_n) , (b_n) \Delta (a_n) = (r'_n)$$

عندها يكون ، لكل عدد صحيح $n \geq 0$:

$$r_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j = \sum_{i+j=n} b_j \cdot a_i = r'_n$$

وبالتالي فإن $(r_n) = (r'_n)$ ، أي أن :

$$(a_n) \Delta (b_n) = (b_n) \Delta (a_n)$$

لنبرهن الآن أن الحلقة (S, \star, Δ) لا تحوي قواسم للصفر .

بفرض أن $q = (h_n) \neq 0, p = (d_n) \neq 0$ عنصرين ما من الحلقة (S, \star, Δ) ، وإذا فرضنا أن :

$\deg p = m_2, \deg q = m_1$ ، وإذا وضعنا $(g_n) = (h_n) \Delta (d_n)$ ، عندها يكون

لدينا :

$$d_{m_2} \neq 0, h_{m_1} \neq 0$$

وبالتالي يكون :

$$h_{m_1} \cdot d_{m_2} \neq 0 \Rightarrow g_{m_1+m_2} \neq 0$$

$$P \Delta q \neq 0$$

إذن :

نستنتج مما سبق أن (S, \star, Δ) حلقة تامة .

مبرهنة (2) :

بالاستفادة من فرضيات المبرهنة السابقة، وإذا كان $g = (v_n) \neq 0, f = (u_n) \neq 0$ كثيرتي حدود على الحلقة R ، وإذا فرضنا أن $\deg u_n = n_1, \deg v_n = n_2$ فإن :

1- $f \Delta g$ إما أن تكون كثيرة حدود صفرية، أو أن تكون :

$$\deg(f \Delta g) \leq n_1 + n_2$$

2- الشرط اللازم والكافي لكي تكون : $\deg(f \Delta g) = n_1 + n_2$ ، هو أن

$$u_{n_1} \cdot v_{n_2} \neq 0$$

البرهان :

(1) بوضع $(u_n) \Delta (v_n) = (w_n)$ يكون لدينا :

$$w_{n_1+n_2} = u_{n_1} \cdot v_{n_2} \quad (1)$$

وإذا كان $n > n_1 + n_2$ ، فإن :

$$w_n = 0 \quad (2)$$

فإذا كان $u_{n_1} \cdot v_{n_2} \neq 0$ فمن العلاقتين السابقتين نجد أن :

$$\deg(f \Delta g) = n_1 + n_2$$

أما إذا كان $u_{n_1} \cdot v_{n_2} = 0$ ، فمن العلاقتين (1) و(2) نجد، أنه إما أن يكون :

$$f \Delta g = 0 \text{ أو } \deg(f \Delta g) \leq n_1 + n_2$$

(2) بفرض أن $\deg(f \Delta g) = n_1 + n_2$ ، فإنه يكون : $w_{n_1+n_2} \neq 0$ ،

وبالتالي من العلاقة (1) نجد أن :

$$u_{n_1} \cdot v_{n_2} \neq 0$$

لنبرهن على العكس، إذا كان $u_{n_1} \cdot v_{n_2} \neq 0$ ، فإنه من العلاقتين (1) و(2) نجد أن:

$$\deg(f \Delta g) = n_1 + n_2$$

مبرهنة (3) :

بالاستفادة من فرضيات المبرهنة السابقة ، وإذا كان K مجموعة كل كثيرات

الحدود التي هي من الشكل :

$$(a, 0, 0, \dots, 0, \dots) ; a \in R$$

فإن : (1) (K, \star, Δ) حلقة جزئية من الحلقة (S, \star, Δ) .

$$(R, +, \cdot) \cong (K, \star, \Delta) \quad (2)$$

البرهان :

(1) ليكن a, b عنصرين ما من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندها :

$$(a, 0, \dots, 0, \dots) \Delta (b, 0, \dots, 0, \dots) = (a \cdot b, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in K$$

$$\begin{aligned} (a, 0, \dots, 0, \dots) \star [-(b, 0, \dots, 0, \dots)] &= (a, 0, \dots, 0, \dots) \star (-b, 0, \dots, 0, \dots) \\ &= (a - b, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in K \end{aligned}$$

وبملاحظة أن $\phi \neq K \subseteq S$ ، يتبين لنا أن (K, \star, Δ) حلقة جزئية من الحلقة

$$(S, \star, \Delta)$$

(2) لنعرّف التطبيق $\varphi : R \longrightarrow K$ بالشكل : $\varphi(x) = (x, 0, \dots, 0, \dots)$ ، لكل

x من R ، وبالتالي يكون لدينا ، لكل x, y من R :

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= (x + y, 0, \dots, 0, \dots) = (x, 0, \dots, 0, \dots) \star (y, 0, \dots, 0, \dots) \\ &= \varphi(x) \star \varphi(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot y) &= (x \cdot y, 0, \dots, 0, \dots) = (x, 0, \dots, 0, \dots) \Delta (y, 0, \dots, 0, \dots) \\ &= \varphi(x) \Delta \varphi(y) \end{aligned}$$

لنبرهن الآن أن التطبيق φ متبايناً :

إذا كان y, x عنصرين ما من R بحيث يكون : $\varphi(x) = \varphi(y)$ ، فإن :

$$(x, 0, \dots, 0, \dots) = (y, 0, \dots, 0, \dots)$$

ومنه يكون : $x = y$.

بالإضافة إلى ذلك ، إذا كان $(z, 0, \dots, 0, \dots)$ عنصراً ما من K فإن z ينتمي إلى R من جهة ، ومن جهة ثانية ، إن : $\varphi(z) = (z, 0, \dots, 0, \dots)$ أي أن التطبيق φ شامل .

نستنتج مما سبق أن $(R, +, \cdot) \cong (K, \star, \Delta)$.

نسمي الحلقة $(S, +, \cdot)$ الواردة سابقاً بحلقة كثيرات الحدود بمحول واحد x على R وسنرمز لـ S بـ $R[x]$.

ملاحظة (2) :

العمليتان الجبريتان الثنائيتان \star, Δ المعرفتان على الحلقة (S, \star, Δ) ، بالشكل الوارد في المبرهنة السابقة ، سنرمز لهما بالرمزين (\cdot) و $(+)$ على الترتيب . ويجب التمييز بين العمليتين $\star, +$ حتى لو رمزنا لهما بالرمز نفسه ، كذلك من الضروري التمييز بين العمليتين Δ و (\cdot) حتى لو رمزنا لهما بالرمز نفسه .

تعريف (3) قيمة كثيرة حدود Evaluation of polynomial :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ كثيرة حدود في $R[x]$ ، وليكن a عنصراً ما من مركز الحلقة $Z(R)$ عندئذ :
العنصر :

$$f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_na^n$$

من R والذي نحصل عليه بتبديل كل x بـ a في $f(x)$ ، يسمى بقيمة كثيرة الحدود $f(x)$ في النقطة a .

(2-4) أمثلة :

1- إذا كان $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ، $g(x) = b_0 + b_1x$ ، فإن :

$$f(x).g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + a_2b_1x^3$$

حيث أن $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.

2- أوجد ناتج ما يلي في حلقة كثيرات الحدود $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$.

$$(1 - 2x + x^3).(2 - x + x^2)$$

ثم اكتب $(x + 1)^3$ في الحلقة $(\mathbb{Z}_3[x], +, \cdot)$.

الحل :

في الحلقة $\mathbb{Z}[x]$ يكون لدينا :

$$(1 - 2x + x^3).(2 - x + x^2) = 2 - 5x + 3x^2 - x^4 + x^5$$

أما في الحلقة $\mathbb{Z}_3[x]$ فإن :

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 1$$

لأن $3 = 0$ في \mathbb{Z}_3 .

3- إن كثيرة الحدود $f(x) = x - x^2 + 2x^3$ من الدرجة الثالثة ، بينما كثيرة

الحدود $g(x) = x + 2$ فهي من الدرجة الأولى ، أما كثيرة الحدود $h(x) = -5$

فهي من الدرجة صفر .

4- إذا كان $f(x) = 1 + 2x$ ، أوجد $f^2(x)$ في الحلقة $(\mathbb{Z}_4[x], +, \cdot)$

و $\deg[f(x).f(x)]$ و $\deg f(x) + \deg f(x)$.

الحل :

$$(f(x))^2 = (1 + 2x)(1 + 2x) = 1 + (2+2)x + 2^2.x = 1$$

لأن $4 = 0$ في \mathbb{Z}_4 .

لدينا :

$$\deg [f(x).f(x)] = \deg 1 = 0$$

بينما :

$$\deg f(x) + \deg f(x) = 1 + 1 = 2$$

لاحظ أن :

$$\deg [f(x).g(x)] \neq \deg f(x) + \deg g(x)$$

والسبب هو أن $(Z_4[x], +, \cdot)$ ليست حلقة تامة .

5- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الحقيقية، إذا كان a عنصراً من مركز الحلقة $Z(R)$ ، أثبت أن التطبيق: $\varphi_a: R[x] \longrightarrow R$ المعرف بالشكل: $\varphi_a[f(x)] = f(a)$ تشاكلاً حلقياً .

الحل :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots, \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots \quad \text{ليكن :}$$

كثيرتي حدود من $R[x]$. عندئذٍ :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$$

ومنه يكون :

$$\begin{aligned} \varphi_a[f(x) + g(x)] &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)a + \dots \\ &= (a_0 + a_1a + \dots) + (b_0 + b_1a + \dots) \\ &= \varphi_a[f(x)] + \varphi_a[g(x)] \end{aligned}$$

كما أن :

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

حيث أن لكل c_k و $k \geq 0$ المعامل c_k بالنسبة لـ x^k ، يعطى بالشكل :

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \dots + a_kb_0$$

وبما أن العنصر a هو الحلقة R ، فيكون لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi_a[f(x)] \cdot \varphi_a[g(x)] &= (a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1a + b_2a^2 + \dots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1a + a_1ab_0) + (a_0ba^2 + a_1aba + a_2a^2b_0) + \dots \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)a + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)a^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1a + c_2a^2 + \dots \\ &= \varphi_a[f(x) \cdot g(x)] \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق أن التطبيق φ_a تشاكل حلقي .

$$\text{-6- لتكن } f(x) = 5 + 4x - 2x^2 + x^3, \quad g(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

. كثيرتي حدود في $(Z[x], +, \cdot)$ ، أوجد $f(3)$, $g(3)$.

الحل :

$$f(3) = 5 + 4 \cdot 3 - 2(3)^2 + (3)^3 = 26$$

$$g(3) = (3-1)(3^2 + 3 + 1) = 26$$

-7- لتكن $f(x) = x^3 - x$ في الحلقة $(Z_6[x], +, \cdot)$ ، أثبت أن $f(a) = 0$ لكل a

من Z_6 .

الحل :

نلاحظ أولاً أن $a^3 = a$ لكل a من Z_6 ، وبالتالي يكون : $f(a) = a^3 - a = 0$.

تعريف (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان a عنصراً منها ، عندئذ نواة التطبيق φ_a . حيث أن :

$$\varphi_a: R[x] \longrightarrow R \text{ تعطى وفق المجموعة التالية :}$$

$$\text{Ker } \varphi_a = \{f(x) \in R[x] : f(a) = 0\}$$

(3-4) خوارزمية القسمة (Division algorithm) :

إذا كانت $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i \cdot x^i$ كثيرتي حدود غير صفريتين

ولنفرض أن b_i قابل للعكس في R في الحلقة الإبدالية وبمحايد $(R[x], +, \cdot)$ ولنرمز لصفرها بـ 0 ، عندئذ توجد كثيرتا حدود وحيدتان $r(x), q(x)$ من $R[x]$ ، بحيث يتحقق :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

و $r = 0$ أو $\deg r < \deg g$.

البرهان :

لنفرض، أولاً، أن $\deg f = n < \deg g = m$ ، وبأخذ $q(x) = 0$ و $r(x) = f(x)$ نجد المطلوب .

نفرض الآن أن $n > m$ وباستخدام الاستقراء الرياضي على العدد n نبرهن ذلك .

فإذا كان $n = m = 0$ ، فإن $f(x) = \alpha$ ، $g(x) = \beta \in R$ ، ومنه يكون: $f = (\alpha \cdot \beta^{-1}) \cdot g + 0$ ، والمبرهنة محققة .

لنفرض الآن، أن المبرهنة صحيحة، من أجل كثيرة الحدود $f(x)$ من $R[x]$ ، والتي تكون من أجلها $\deg f \leq n-1$ ، ولنبرهن على صحتها من أجل $\deg f = n$ ، علماً أن $a_n \neq 0$ ، $b_m \neq 0$.

من أجل ذلك نعرف كثيرة الحدود :

$$f_1(x) = f(x) - \left(\frac{a_n}{b_m} \right) x^{n-m} \cdot g(x) \quad (1)$$

في الحلقة $(R[x], +, \cdot)$ ، وبالتالي، فإن معامل x^n في $f_1(x)$ هو $a_n - (a_n b_m - 1) \cdot b_m = 0$ ، وبالتالي، فإن $\deg f_1 < n$. وحسب الاستقراء

الرياضي توجد كثيرتا حدود $r(x), g(x) \in R[x]$ بحيث يكون :

$$f_1(x) = g(x) q(x) + r(x) \quad \text{و} \quad \deg r < \deg g \quad \text{أو} \quad r = 0$$

بتعويض قيمة $f_1(x)$ من (2) في (1) نجد :

$$f(x) - \left(\frac{a_n}{b_m} \right) x^{n-m} \cdot g(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

ومنه يكون :

$$f(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q(x) \right) \cdot g(x) + r(x)$$

وبوضع $p(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q(x)$ نجد أن :

$$f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x) \quad ; \quad p(x), r(x) \in R[x]$$

و $r = 0$ أو $\deg r < \deg g$ ، وبالتالي المبرهنة صحيحة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

لنبرهن أخيراً على وحدانية كثيرتي الحدود $r(x), q(x)$ في $R[x]$.

لتكن :

$$f(x) = q_2(x) g(x) + r_2(x) \quad , \quad f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$$

$$\deg r_1, \deg r_2 < \deg g, \quad r_1 = r_2 = 0$$

و

ب طرح العلاقتين السابقتين نجد :

$$[q_1(x) - q_2(x)] g(x) = r_2(x) - r_1(x)$$

ومنه يكون :

$$\deg(r_2 - r_1) = \deg(q_1 - q_2) + \deg g$$

أي أن: $\deg(r_2 - r_1) \geq \deg g$ ، وهذا يناقض كون $\deg r_1$ و $\deg r_2 < \deg g$ ،

وبالتالي سيكون $r_1 = r_2$ و $q_1 = q_2$.

مثال (8) :

لتكن: $f(x) = x^4 + 3x^3 + x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ كثيرتي حدود في الحلقة

$(R[x], +, \cdot)$. طبق خوارزمية القسمة لإيجاد كثيرتي الحدود $r(x), q(x)$.

الحل :

باستخدام عملية التقسيم المألوفة نجد :

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 3x - 1) + (-2x + 2)$$

أي أن :

$$\deg r < \deg g = 2, \quad q(x) = x^2 + 3x - 1, \quad r(x) = -2x + 2$$

(4-4) مبرهنة (4) : مبرهنة العامل Factor theorem

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ذات عنصر الوحدة ، ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود في

$R[x]$ ، وإذا كان a عنصراً من R ، ولنرمز لصفها بـ 0 ولعنصرها المحايد

بـ 1 ، عندئذٍ : $f(a) = 0$ ، إذا ، فقط إذا ، كان $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$ ، من

أجل $q(x) \in R[x]$ (أي إذا كان $(x - a)$ قاسم لـ $f(x)$ في $R[x]$) .
البرهان :

لنفرض أولاً أن : $f(a) = 0$ ، ولنبرهن أن $x - a$ قاسم لـ $f(x)$ في $R[x]$.
بما أن : $\deg(x - a) = 1$ ، فإنه حسب مبرهنة التقسيم الخوارزمي ، يمكن إيجاد
كثيرة حدود $q(x)$ من $R[x]$ وعنصر b من R بحيث يكون :

$$f(x) = q(x)(x - a) + b$$

وبما أن $f(a) = 0$ ، فإن $b = 0$ ، وبالتالي فإن $f(x) = q(x)(x - a)$ ، وهذا
يعني أن $x - a$ يقسم $f(x)$ في $R[x]$.

لنبرهن العكس : أي لنبرهن أن $f(a) = 0$ ، علماً أن $(x - a)$ يقسم $f(x)$ في
 $R[x]$ ، بما أن $x - a$ يقسم $f(x)$ في $R[x]$ ، فإنه يمكن إيجاد كثيرة حدود $q_1(x)$
من $R[x]$ بحيث يكون : $f(x) = q_1(x)(x - a)$ ومنه $f(a) = 0$.

(5-4) مبرهنة الباقي Remainder theorem :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية، وإذا كان $f(x) \in R[x]$ يقسم $x - a$ ، عندئذ يكون
الباقي هو $f(a)$.

تطبيق لمبرهنة الباقي :

لتكن $f(x) = 2x^3 + x + 1$ كثيرة حدود في $Z_6[x]$ ، وإذا كان $a = 2$ ، عندئذ
يكون لدينا : $x - 2 = x + 4$ في $Z_6[x]$.

تعطى خوارزمية القسمة بالشكل : $f(x) = (x - 2)(2x^2 + 4x + 3) + 1$ لأن :

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 4x + 3 \\ x + 4 \overline{) 2x^3 + x + 1} \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \\ 4x^2 + x + 1 \\ \underline{4x^2 + 4x} \\ 3x + 1 \\ \underline{3x} \\ 1 \end{array}$$

لاحظ أن الباقي هو 1 ويساوي $f(2)$.

تعريف (4) تعريف جذر كثيرة الحدود **Root of polynomial** :

ليكن $f(x) \in R[x]$ ، حيث $(R[x], +, \cdot)$ حلقة إبدالية، العنصر a من R يسمى جذر لـ $f(x)$ ، إذا كان $f(a) = 0$.

الجذر a يسمى جذر مضاعف، ودرجة تضاعفه هو العدد $m \geq 1$ ، إذا كان $f(x) = (x - a)^m \cdot g(x)$ ، حيث أن $g(a) \neq 0$.

مثال (9) :

بيّن أن العدد 2 هو جذر مضاعف لـ $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4$ في $Z_8[x]$.

الحل :

بما أن $f(2) = 0$ ، إذن العدد 2 هو جذر لـ $f(x)$ في $Z_8[x]$.

كما أن $f(x) = (x - 2)g_1(x)$ ، حيث أن $g_1(x) = x^3 - x^2 + x + 2$

باستخدام خوارزمية القسمة . ليكن $g_1(2) = 0$ أيضاً، لذلك نكتب :

$g_1(x) = (x - 2)g_2(x)$ ، حيث أن $g_2(x) = x^2 + x + 3$ ، وبما أن $g_2(x) \neq 0$ ،

إذن :

$$f(x) = (x - 2)^2 (x^2 + x + 3)$$

إذن $a = 2$ جذر مضاعف لـ $f(x)$ ودرجة تضاعفه هي 2 .

مثال (10) :

كثيرة الحدود $x^2 + 9$ لا تملك جذوراً في حلقة الأعداد الحقيقية $(R, +, \cdot)$ ، لكنها تملك جذرين مختلفين في حلقة الأعداد المركبة $(C, +, \cdot)$ وهما

$$x_1 = +3i, x_2 = -3i$$

مثال (11) :

إن لكثيرة الحدود $x^2 - 1$ جذرين هما $+1$ و -1 في أية حلقة إبدالية لكن لها أربعة جذور وهي $1, 3, 5, 7$ في $(Z_8, +, \cdot)$.

المبرهنة الأساسية في الجبر Fundamental theorem of Algebra :

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير ثابتة من حلقة كثيرات الحدود $(C[x], +, \cdot)$ على الحقل $(C, +, \cdot)$ ، عندها يوجد لـ $f(x)$ جذر في C حيث C حقل الأعداد المركبة .

مبرهنة (6) : مبرهنة الجذور n - Root theorem

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، وإذا كان $f(x)$ كثيرة حدود غير صفرية من الدرجة n في $R[x]$ عندئذٍ $f(x)$ تملك n جذراً في R (ليس من الضروري أن تكون جميعها مختلفة) .

البرهان :

باستخدام الاستقراء الرياضي على n حيث $n = \deg f(x)$.

إذا كان $n = 0$ ، فإن $f(x)$ كثيرة حدود ثابتة (غير معدومة) ، وفي هذه الحالة لا تملك $f(x)$ جذوراً .

إذا كان $n = 1$ ، فإن $f(x) = a_0 + a_1 x$ حيث $a_1 \neq 0$ ، وليكن a, b جذران لـ $f(x)$ ، عندها يكون $a_0 + a_1 a = 0 = a_0 + a_1 b$ ، وبالتالي $a_1 (b - a) = 0$ ، ومنه يكون $b - a = 0$ لأن R حلقة تامة .

لنفرض الآن $n > 1$.

إذا كانت $f(x)$ لا تملك جذوراً في r ، فإنه يكون قد اكتمل البرهان .

إذا كان $f(a) = 0$ حيث a من R ، عندئذٍ نستطيع كتابة حسب مبرهنة العامل $f(x) = (x - a)g(x)$ ، حيث $\deg g(x) = n - 1$. لنفرض أن b هو جذر لـ $f(x)$ ومختلف عن a ، عندها يكون :

$$0 = f(b) = (b - a)g(b)$$

لذا $g(b) = 0$ ، لأن R حلقة تامة . لكن كثيرة الحدود $g(x)$ تملك $(n-1)$ جذراً في R (حسب الاستقراء الرياضي) لذلك يكون لـ $f(x)$ على الأكثر $(n-1)$ جذراً مختلفاً عن الجذر a وبالتالي، فإن كثيرة الحدود $f(x)$ تملك n جذراً في R .

مثال (12) :

حدّد عدد وجذور كثيرة الحدود التالي :

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 (x^2 - 5x + 6)$$

الحل :

بما أن درجة $f(x)$ هي 6 ، فسيكون لـ $f(x)$ ستة جذور على الأكثر (قد يكون بعضها منها مكرراً).

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 (x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x - 2)^2 (x + 2)^2 (x - 2) (x + 3)$$

$$= (x - 2)^3 (x + 2)^2 (x + 3)$$

إن جذور $f(x)$ هي : $\{2, 2, 2, -2, -2, -3\}$.

مبرهنة الجذور النسبية (الكسرية) Rational roots theorem

لتكن $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ كثيرة حدود في حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ ، حيث أن $a_0 \neq 0$ و $a_n \neq 0$ ، وبفرض أن $c/d \in \mathbb{Q}$ جذراً لـ $f(x)$ حيث Q مجموعة الأعداد النسبية، وبحيث $\gcd(c, d) = 1$ ، عندئذٍ c/a_0 و d/a_n .

البرهان :

$$0 = f(c/d) = a_0 + a_1c/d + \dots + a_n c^n/d^n \quad \text{لدينا :}$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ d^n نحصل على :

$$0 = a_0 d^n + a_1 c d^{n-1} + \dots + a_{n-1} c^{n-1} d + a_n c^n$$

بما أن c يدخل في كل تركيب من التراكيب السابقة ما عدا الأول منها لذا يكون $c/a_0 d^n$. وبما أن $\gcd(c, d^n) = 1$ ، ومنه يكون c/a_0 وبشكل مشابه يكون d/a_n .

ملاحظة (3) :

استخدمنا في البرهان السابق الحقيقة الرياضية التالية :

إذا كان n, m عدداً أوليان نسبياً ، أي $(m, n) = 1$ ، فإن :

1- إذا كان $m/k, n/k$ ، لكل k عدد صحيح ، فإن $m.n/k$.

2- إذا كان $m/k.n$ ، لكل k عدد صحيح ، فإن m/k .

المثال التالي يوضح المبرهنة السابقة :

مثال (13) :

ليكن $f(x) = 3x^3 - x^2 - x - 4$ في $Q[x]$ ، طبق نظرية العامل لـ $f(x)$ في

$Q[x]$

الحل :

إذا كان c/d (عدداً نسبياً) جذراً لـ $f(x)$ ، فإن $c/(-4)$ و $d/3$ حسب المبرهنة السابقة .

بما أن $c = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ و $d = \pm 1, \pm 3$ وبالتالي فإن الإمكانيات المتاحة لـ c/d هي :

$$c = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 4/3$$

إن $4/3$ هو جذر لـ $f(x)$ ، وبالتالي ، فإن $x - \frac{4}{3}$ العامل لـ $f(x)$ في $Q[x]$.
وبما أن $(3x - 4)$ هو عامل في $Q[x]$ وباستخدام مبرهنة التقسيم الخوارزمي ، نجد أن :

$$f(x) = (3x - 4)(x^2 + x + 1)$$

ومن الواضح أنه ليس لـ $(x^2 + x + 1)$ جذوراً في $Q[x]$.

ملاحظة (4) :

سنرمز لحلقة كثيرات الحدود على الحقل $(F, +, \cdot)$ بالرمز $F[x]$.

(6-4) القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود

Greatest common divisor of polynomials

تعريف القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود :

إذا كانت $(F[x], +, \cdot)$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل $(F, +, \cdot)$ ، وبفرض أن $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود غير صفريتين على $F[x]$. نقول عن كثيرة حدود

$d(x)$ من $F(x)$ إنها قاسم مشترك أعظم لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$ إذا تحقق ما يلي :

$$d(x)/g(x), d(x)/f(x) -1$$

2- إذا وُجِدَتْ كثيرة حدود، ولتكن $h(x) \in F(x)$ ، بحيث $h(x)/f(x)$ و $h(x)/g(x)$ ، فإن $h(x)/d(x)$

نرمز عادةً للقاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$ في $F[x]$ بالرمز $(f(x), g(x))$.

المبرهنة التالية ، تبين لنا على وجود ووحدانية القاسم المشترك الأعظم $d(x)$.
مبرهنة (7) :

لتكن $(F[x], +, \cdot)$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل $(F, +, \cdot)$ ، وإذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود غير صفريتين في $F[x]$ ، عندئذٍ يوجد لهما قاسم مشترك أعظم وحيد $d(x)$ يعطى بالعلاقة :

$$d(x) = \alpha(x).f(x) + \beta(x).g(x) ; \forall \alpha(x), \beta(x) \in F[x]$$

البرهان :

باستخدام مبرهنة التقسيم الخوارزمي نجد :

$$f(x) = q_1(x).g(x) + r_1(x) ; \deg r_1(x) < \deg g(x)$$

$$g(x) = q_2(x).r_1(x) + r_2(x) ; \deg r_2(x) < \deg r_1(x)$$

.....

$$r_{k-2}(x) = q_k(x).r_{k-1}(x) + r_k(x) ; \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x)$$

$$r_{k-1}(x) = q_k(x).r_k(x) + 0$$

نستنتج مما سبق أن $r_k(x)$ قاسم لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$ ، وإذا استخدمنا المعادلات الأخيرة من الأسفل نحو الأعلى نستطيع إيجاد كثيرتي الحدود $\alpha(x), \beta(x)$ من $F[x]$ بحيث يكون :

$$d(x) = \alpha(x).f(x) + \beta(x).g(x)$$

لنثبت الآن على الوحدانية . من أجل ذلك ، نفرض وجود قاسم مشترك آخر لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$ وهو $L(x)$ ، وبالتالي يكون : $L(x)/f(x)$ و $L(x)/g(x)$ ، ومنه يكون : $d(x)/L(x)$ و $L(x)/d(x)$ ، إذن $L(x) = d(x).n(x)$ و $d(x) = L(x).m(x)$ ، إذن : $d(x) = d(x).m(x).n(x)$. وبما أن حلقة $F(x)$ تامة ، إذن $m(x).n(x) = 1$ ، وبالتالي ، فإن كل من كثيرتي الحدود $m(x)$ و $n(x)$ عدد ثابت ، إذن : $d(x) = L(x)$.

مبرهنة (8) :

إذا كانت $(F[x], +, \cdot)$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل F ، فإن هذه الحلقة تشكل حلقة إقليدية .

البرهان :

نشكّل الدالة الإقليدية : $d: F^*[x] \rightarrow N$ بالشكل التالي $d(f) = \deg f$

وبسهولة ، نتحقق من الشروط :

$$(1) \quad d(f) \geq 0 \text{ لكل } f \text{ من } F^*[x] .$$

$$(2) \quad \text{من أجل أي } f(x) \text{ و } g(x) \text{ من } F^*[x] \text{ يكون : } \deg f \leq \deg(f.g)$$

$$(3) \quad \text{لكل كثيرتي حدود } f(x), g(x) \in F^*[x] \text{ ، توجد كثيرتا حدود}$$

$$r(x), q(x) \in F^*[x] \text{ بحيث يكون :}$$

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x) \text{ ، } r = 0 \text{ ، } \deg r < \deg g$$

وذلك حسب مبرهنة التقسيم الخوارزمي ، إذن $(F[x], +, \cdot)$ تشكل حلقة إقليدية .

مثال (14) :

أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 \text{ ، } g(x) = x^2 + 5x + 6$$

على حلقة كثيرات الحدود $(Q[x], +, \cdot)$.

الحل :

حسب تعريف القاسم المشترك الأعظم ، لدينا :

$$f(x) = (x^2 + 3)(x + 2) \text{ ، } g(x) = (x + 3)(x + 2)$$

وبالتالي فإن :

$$d(x) = (f(x), g(x)) = x + 2$$

مثال (15) :

مستفيداً من المبرهنة قبل الأخيرة ، أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ في الحلقة $(\mathbb{Z}_3[x], +, \cdot)$ لكثيرتي الحدود :

$$f(x) = x^5 + 2, g(x) = 2(x^4 + 1)$$

الحل :

حسب المبرهنة قبل الأخيرة ، لنوجد كثيرتي الحدود $\alpha(x), \beta(x)$ بحيث يكون :

$$d(x) = \alpha(x).f(x) + \beta(x).g(x) \text{ لكل } \alpha(x), \beta(x) \text{ من } \mathbb{Z}_3[x]$$

باستخدام مبرهنة التقسيم الخوارزمي ، نكتب :

$$x^5 + 2 = 2x(2x^4 + 2) + (2x + 2)$$

$$2x^4 + 2 = (x^3 + 2x^2 + x + 2)(2x + 2) + 1$$

$$2x + 2 = (2x + 2).1 + 0$$

$$d(x) = (f(x), g(x)) = 1$$

إذن :

باستخدام المعادلات السابقة نجد :

$$1 = 2x^4 + 2 - (x^3 + 2x^2 + x + 2)(2x + 2)$$

$$= 2x^4 + 2 - (x^3 + 2x^2 + x + 2)[(x^5 + 2 - 2x)(2x^4 + 2)]$$

$$= (2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1)(2x^4 + 2) + (2x^3 + x^2 + 2x + 1)(x^5 + 2)$$

إذن نجد :

$$\alpha(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1, \beta(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

(7-4) المضاعف المشترك الأصغر Least common multiple :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً إبدالياً ما ، وإذا كانت $f(x) \neq 0 \neq g(x) \in K[x]$ نعرّف المضاعف المشترك الأصغر لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$ بأنها كثيرة الحدود الواحدية ولتكن $c(x)$ من حلقة كثيرات الحدود $(K[x], +, \cdot)$ بحيث يتحقق ما يلي :

$$(1) \quad g(x)/c(x) \text{ و } f(x)/c(x)$$

(2) إذا كان $c_1(x) \in K[x]$ وكان $f(x)/c_1(x)$ و $g(x)/c_1(x)$ عندئذ يكون

$$c(x)/c_1(x)$$

نرمز عادةً للمضاعف المشترك الأصغر لـ $f(x)$ و $g(x)$ بالرمز :

$$c(x) = \ell \text{cm}(f, g)$$

يمكن البرهان بسهولة على ما يلي :

المضاعف المشترك الأصغر لكثيرتي الحدود المغايرتين للصفر تتعين بشكل وحيد.

مبرهنة (9) :

لتكن $f(x) \neq 0 \neq g(x) \in K[x]$ ، ولنأخذ المثالية الرئيسة $c(x).K[x]$ الذي

يساوي التقاطع :

$f(x).K[x] \cap g(x).K[x]$ للمثاليتين الرئيسيتين المولدتين بـ $f(x)$ و $g(x)$ ، حيث

$c(x)$ كثيرة حدود واحدة ، عندها تكون $c(x)$ المضاعف المشترك الأصغر لـ

$f(x)$ و $g(x)$.

البرهان :

$$c(x).K[x] = f(x).K[x] \cap g(x).K[x] \quad \text{لدينا فرضاً :}$$

حيث أن $c(x)$ كثيرة حدود واحدة ، وبالتالي فإن $c(x) \in f(x).K[x]$ أي انه توجد

كثيرة حدود $q(x)$ من $K[x]$ بحيث يكون : $c(x) = f(x).g(x)$ ، وهذا يعني أن

$f(x)/c(x)$. وكذلك $c(x) \in g(x).K[x]$ ، ومنه ، وبصورة مشابهة نجد أن

$g(x)/c(x)$.

من ناحية ثانية ، إذا كانت $c_1(x) \in K[x]$ ، بحيث يكون : $f(x)/c_1(x)$

و $g(x) \in c_1(x)$ ، عندها توجد كثيرتي حدوديتين مثل $\varphi(x)$ و $\Psi(x)$ ، بحيث

يتحقق :

$$c_1(x) = f(x).\varphi(x) \in f(x).K[x]$$

$$c_1(x) = g(x).\Psi(x) \in g(x).K[x]$$

وهذا يعني أن $c_1(x) \in c(x).K[x]$ ، إذن توجد كثيرة حدود $\Psi(x)$ بحيث يكون :

. $c(x)/c_1(x)$ وهذا يعني أن $c_1(x) = c(x) \cdot \Psi(x)$

نستنتج مما سبق أن $c(x)$ هي المضاعف المشترك الأصغر لكثيرتي الحدودتين $f(x)$ و $g(x)$.

مبرهنة (10) :

إن حلقة كثيرات الحدود $(F[x], +, \cdot)$ على الحقل $(F, +, \cdot)$ هي حلقة تامة رئيسة .
البرهان :

إذا كانت I مثالية في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$ ، وإذا كان $I = \{0\}$ ، فيكون $I = \langle 0 \rangle$ وهي مثالية رئيسة في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$.

ولنفرض الآن أن $I \neq \{0\}$ ، وإذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير صفرية في I درجتها اصغر ما يمكن، وإذا كان $\deg f = 0$ ، فإن $f(x) = a \in F$ ، فإن a عنصر وحدة ، ويكون في هذه الحالة :

$$f(x) = \langle a \rangle \in F[x]$$

إذن I مثالية رئيسة .

لنفرض الآن أن $\deg f \geq 1$ ، وإذا كان $g(x) \in I$ فحسب مبرهنة التقسيم الخوارزمي يكون :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

و $r = 0$ و $\deg r < \deg g$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$r(x) = g(x) - f(x) \cdot q(x)$$

لأن I مثالية في $F[x]$ ، ولأن $g(x) \neq 0$ ، درجته اصغر ما يمكن ضمن عناصر المثالية I إذن $r = 0$ ، وبالتالي ، فإن $g(x) = f(x) \cdot q(x)$ ، أي أن $I = \langle f \rangle$.
نستنتج مما سبق أن حلقة كثيرات الحدود $(F[x], +, \cdot)$ هي حلقة تامة رئيسة .

(8-4) كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل Irreducible polynomials :

تعريف (5) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقل ما ، نقول عن كثيرة الحدود غير الصفرية $P(x)$ في $F[x]$ إنها غير قابلة للتحليل على F أو في $F[x]$ إذا تحقق ما يلي :

$$\deg P(x) \geq 1 \quad (1)$$

(2) إذا كان $P(x) = f(x).g(x)$ في $F[x]$ ، عندها، إما $\deg f(x) = 0$ أو $\deg g(x) = 0$.

ونقول إن كثيرة الحدود $P(x)$ من $F[x]$ إنها قابلة للتحليل (Reducible)، إذا لم يتحقق أحد الشرطين السابقين، بكلام آخر، نقول عن $P(x)$ إنها قابلة للتحليل إذا كانت $P(x) = f(x).g(x)$ حيث:

$$0 < \deg g(x) < \deg P(x)$$

$$0 < \deg f(x) < \deg P(x)$$

لكل $f(x)$ و $g(x)$ من $F[x]$.

مثال (16):

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما، أثبت أن كل كثيرة حدود خطية تكون غير قابلة للتحليل على F .

الحل:

لتكن كثيرة الحدود $P(x) = ax + b$ ، من أجل $a \neq 0$ ، وبفرض أن $P(x) = f(x).g(x)$ في $F[x]$ ، بما أن F حلقة تامة، فإن:

$$\deg f(x) + \deg g(x) = \deg P(x) = 1$$

ولدينا $\deg f(x) \geq 0$ و $\deg g(x) \geq 0$ ، وهما عبارة عن أعداد صحيحة، وبالتالي فإن درجة أحدهما تساوي الصفر.

نلاحظ مما سبق أن قابلية تحليل كثيرة حدود تعتمد على الحقل المدروس، فمثلاً في المثال السابق إن كثيرة الحدود $x^2 + 1$ غير قابلة للتحليل على الحقل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ لكنها قابلة للتحليل على حقل الأعداد المركبة $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. ويكون:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

نتيجة (1):

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما، وإذا كانت c كثيرة الحدود $P(x)$ من $F[x]$ غير قابلة للتحليل على الحقل F ، فإن $a.P(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل أيضاً على F ،

حيث أن $a \neq 0$ من F .

البرهان :

إذا كان $a.P(x) = f(x).g(x)$ في $F[x]$ ، عندئذ يكون $P(x) = [a^{-1} f(x)].g(x)$ وبسبب كون كثيرة الحدود $P(x)$ غير قابلة للتحليل في $F[x]$ ، يؤدي إلى أن إما :

$$\deg(a^{-1} f(x)) = \deg f(x) = 0 \text{ أو } \deg g(x) = 0$$

وهذا يبين لنا أن $a.P(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في $F[x]$.

مبرهنة (11) :

إذا كان E حقلاً جزئياً من الحقل $(F, +, \cdot)$ ، ولتكن $f(x) \in E[x]$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على E ، وإذا كان $a \in F$ جذراً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون $a \in F$ جذراً مضاعفاً لـ $f(x)$ هو أن يكون a جذراً لكثيرة الحدود $f'(x)$ (مشتقة كثيرة الحدود $f(x)$).

البرهان :

إذا كان $a \in F$ جذراً مضاعفاً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فإنه يوجد عدد صحيح موجب ، ليكن $n > 1$ يكون من أجله $f(x) = (x - a)^n . g(x)$ حيث أن $g(x) \in E[x]$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$f'(x) = n(x - a)^{n-1} . g(x) + (x - a)^n . g'(x)$$

وبما أن $(n - 1) > 0$ ، فإن $(x - a)/f'(x)$ ، أي أن a جذر لكثيرة الحدود $f'(x)$.

لنبرهن الآن أن a جذر مضاعف لكثيرة الحدود $f(x)$.

بما أن a جذر لكثيرة الحدود $f'(x)$ ، فإن $f'(a) = 0$ ، وبما أن a جذر لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فيكون :

$$f(x) = (x - a) g(x) ; g(x) \in E[x] \quad (1)$$

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد أن :

$$f'(x) = g(x) + (x - a) g'(x)$$

وبالتالي يكون :

$$0 = f'(a) = g(a) + (a - a) g'(a)$$

إذن : $g(a) = 0$ ، وبالتالي ، يكون $(x - a)/g(x)$ ، أي أن :

$$g(x) = (x - a) \cdot h(x) ; h(x) \in E(x)$$

بتعويض $g(x)$ في العلاقة (1) نجد :

$$f(x) = (x - a)^2 \cdot h(x)$$

إذن a جذر مضاعف لكثيرة الحدود $f(x)$.

مبرهنة (12) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، ولتكن كثيرة الحدود $P(x)$ من $F[x]$ بحيث يكون $\deg P(x) \geq 2$ ، عندئذ يتحقق ما يلي :

(1) إذا كانت $P(x)$ غير قابلة للتحليل على F ، فإن $P(x)$ لا تملك جذراً في F .

(2) إذا كانت درجة $P(x)$ تساوي 2 أو 3 ، عندئذ تكون $P(x)$ غير قابلة

للتحليل على F ، إذا ، فقط إذا ، لم يكن لها جذر في F .

البرهان :

(1) إذا كان لكثيرة الحدود $P(x)$ جذراً وليكن $a \in F$ ، فإن $P(a) = 0$ ، لذلك

$P(x) = (x - a) q(x)$ (حسب نظرية العامل) ، وبما أن $\deg P(x) \geq 2$ فهذا

يعني أن كثيرة الحدود قابلة للتحليل ، وهذا يناقض الفرض ، إذن $P(x)$ ليس لها

جذر في R .

(2) لنفرض أن $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ وليس لـ $P(x)$ جذراً في F ، عندئذ $f(x)$

و $g(x)$ لا تملكان أي جذر في F ، لذا : $\deg f(x) \neq 1$ و $\deg g(x) \neq 1$. لكن ،

بما أن :

$$\deg f(x) + \deg g(x) = \deg P(x)$$

وأن درجة $P(x)$ هي 2 أو 3، فهذا يبين لنا أن إما $\deg f(x) = 0$

$$\cdot \deg g(x) = 0$$

إذن $P(x)$ غير قابلة للتحليل .

برهان العكس ينتج مباشرةً من (1) .

مثال (17) :

بيّن فيما إذا كانت كثيرة الحدود $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$ غير قابلة للتحليل

على Z_5 .

الحل :

بما أن $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ ، وبالتالي نستطيع تحديد أي من العناصر السابقة

تمثل جذراً لـ $P(x)$:

$$P(0) = 2 , P(1) = 2 , P(2) = 4 , P(3) = 4 , P(4) = 3 \quad \text{إن}$$

بما أن $P(x)$ ليس لها أي جذر في Z_5 ، حسب المبرهنة السابقة تكون $P(x)$ غير

قابلة للتحليل في Z_5 .

مثال (18) :

كثيرة الحدود $P(x) = x^2 + 9$ غير قابلة للتحليل في $R[x]$ ، لأنه (حسب

المبرهنة السابقة) لا تملك جذراً في R .

ملاحظة (5) :

يبين الجزء الثاني من المبرهنة السابقة ، أن اختبار قابلية التحليل أو غير قابلية

التحليل لكثيرة الحدود $P(x)$ تصح فقط في حالة $\deg P(x)$ هي 2 أو 3 لكنها تفشل

في حالة $\deg P(x)$ تساوي أربعة أو أكثر . فعلى سبيل المثال ، إذا كانت :

$$P(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

من الواضح أنها قابلة للتحليل في $R[x]$ ، لكن ليس لها جذور في R .

مبرهنة (13) :

لتكن $f(x) \in C[x]$ حيث أن $\deg f(x) = n \geq 1$ ، عندئذٍ يتحقق ما يلي :

$$f(x) = u(x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n) \quad (1)$$

حيث أن u_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ (جذور لـ $f(x)$ في C) ، (ليس من الضروري أن تكون مختلفة فيما بينها) . u عامل لـ $f(x)$.

(2) كثيرة الحدود الوحيدة غير القابلة للتحويل في $C[x]$ هي كثيرة الحدود الخطية في $C[x]$.

البرهان :

(1) باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي على n نجد :

إذا كان $n = \deg f(x) = 1$ ، فهذا يعني أن $f(x) = ux + b$ ، حيث $u \neq 0$.

إن $f(x) = ux + b = u(x + u^{-1}.b)$ ، لذلك $u_1 = -u^{-1}.b$.

إذا كان $n > 1$ ، فيكون لـ $f(x)$ جذر وليكن u_1 حسب النظرية الأساسية في الجبر

لذا يكون : $f(x) = (x - u_1).q(x)$ حيث أن $\deg q(x) = n - 1$.

وباستخدام الاستقراء الرياضي :

$$q(x) = u(x - u_2)(x - u_3)\dots(x - u_n)$$

وبالتالي يكون :

$$f(x) = u(x - u_1)(x - u_2)\dots(x - u_n)$$

حيث أن u_1, u_2, \dots, u_n جذور لـ $f(x)$ في $C[x]$.

(2) ينتج من (1) مباشرة .

مأخوذة غوص Gauss's Lemma :

إذا كانت $f(x) = g(x).h(x)$ في $Z[x]$ ، وإذا كان P عدداً أولياً يقسم كل معاملات لـ $f(x)$ ، عندئذٍ P يقسم كل معاملات لـ $g(x)$ أو P يقسم كل معاملات لـ $h(x)$.

(9-4) كثيرة الحدود البدائية (الأولية) Prmitive polynomail

لنعرف أولاً سعة كثيرة الحدود .

تعريف (6) سعة كثيرة حدود Content :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، ولتكن $f(x) \in (F[x])$ كثيرة حدود غير صفرية على

الحقل F ، نسمي القاسم المشترك الأعظم لمعاملات كثيرة الحدود $f(x)$ بسعة كثيرة الحدود ، ونرمز لها عادةً بـ $c(f)$.

وفي حالة خاصة ، إذا كانت $c(f) = 1$ ، فإننا نسمي كثيرة الحدود $f(x)$ بكثيرة الحدود البدائية Primitive polynomials .

مثال (19) :

بين أي من كثيرات الحدود التالية بدائية :

$$f(x) = 22x^3 + 10x^2 - 21x \in \mathbb{Q}[x]$$

$$g(x) = 3x^4 + 18x^2 - 81x + 27 \in \mathbb{Q}[x]$$

الحل :

بما أن $c(f) = 1$ ، إذن كثيرة الحدود $f(x)$ بدائية ، لأن القاسم المشترك الأعظم للمعاملات $22, 10, -21$ هو الواحد . أما $c(g) = 3$ لأن القاسم المشترك الأعظم للمعاملات $3, 18, -8, 27$ هو 3 ، إذن كثيرة الحدود $g(x)$ ليست بدائية .

نتبين ، المبرهنة التالية ، أن حاصل ضرب كثيرتي حدود بدائيتين هي كثيرة حدود بدائية .

مبرهنة (14) :

إذا كانت $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ كثيرتي حدود بدائيتين على الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، فإن حاصل ضربهما $f(x).g(x)$ كثيرة حدود بدائية على الحلقة \mathbb{Z} .

البرهان :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \in \mathbb{Z}[x] , \quad g(x) = \sum_{i=0}^m b_i \cdot x^i \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{لنتكن}$$

$$h(x) = f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \cdot x^k \quad \text{ولنتكن}$$

إذا كانت $c(h) \neq 0$ ، فهذا يعني أن معاملات كثيرة الحدود $h(x)$ تقبل القسمة على العدد الأولي P . بما أن $f(x)$ كثيرة حدود ، فإن P لا تقسم بعض المعاملات a_i لـ $f(x)$ ، وليكن a_t هو المعامل الأول في $f(x)$ الذي لا يقبل القسمة على P ،

وكذلك بالنسبة لكثيرة الحدود $g(x)$ ، وليكن العامل الأول في $g(x)$ الذي لا يقبل القسمة على العدد الأولي P ، بما أن :

$$c_{t+s} = a_0 \cdot b_{t+s} + a_1 \cdot b_{t+s-1} + \dots + a_{t-1} \cdot b_{s+1} + a_t \cdot b_s + \dots + a_{t+s} \cdot b_0$$

وبما أن P لا يقسم a_i ، لكل $i < t$ ، نجد أن P لا يقسم المجموع التالي :

$$a_0 \cdot b_{t+s} + \dots + a_{t-1} \cdot b_{s+1}$$

وبما أن P لا يقسم b_j لكل $j < s$ ، وبالتالي ، فإن P لا يقسم المجموع التالي :

$$a_{t+1} \cdot b_{s-1} + \dots + a_{t+s} \cdot b_0$$

وبالتالي فإن P لا يقسم c_{t+s} ، أي P لا يقسم $a_t b_s$ ، لأن P لا يقسم a_t و P لا يقسم b_s ، إذن P لا يقسم c_{t+s} ، أي أن $h(x)$ كثيرة حدود بدائية .

نتيجة (2) :

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على الحقل F من $F[x]$ ، وإذا كان $\deg f > 1$ ، عندئذٍ $f(x)$ كثيرة حدود بدائية .

البرهان :

لتكن $f(x) = c(f) \cdot g(x)$ ، وبالتالي ، فإما $c(f)$ أو $g(x)$ عنصر وحدة في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$ ، لأن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على الحقل F ، ولكن $g(x)$ ليس عنصر وحدة ، لأن $\deg g(x) > 1$ ، إذن $c(f)$ عنصر وحدة ، وهذا يعني أن $c(f) = 1$.

مبرهنة وحدانية التحليل Unique Factorisation in $F[x]$

لتكن $(F[x], +, \cdot)$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل $(F, +, \cdot)$ ، ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود من $F[x]$ حيث $n = \deg f(x) \geq 1$ ، عندئذٍ يتحقق ما يلي :

$$f(x) = \alpha P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_n(x) \quad (*)$$

حيث α من F و $P_i(x)$ كثيرات حدود وحادية غير قابلة للتحليل على الحقل F و $1 \leq i \leq m$ ، كما أن هذا التحليل (*) وحيد (عدا إمكانية إعادة ترتيب العوامل) .

البرهان :

تبرهن المبرهنة المذكورة بطريقة الاستنتاج (الاستقراء) الرياضي على n .

إذا كان $n = 1$ ، فمن الواضح أن كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل على الحقل

F . لنفرض الآن $n > 1$ ، يكون $f(x) = g(x).h(x)$ حيث أن :

$$0 < \deg h < n , 0 < \deg g < n$$

ومن الاستنتاج الرياضي ، فإن كثيرتي الحدود $h(x)$ و $g(x)$ تكتبان على شكل حاصل ضرب غير قابل للتحويل . وإذا كانت $f(x) = q_1(x).q_2(x) \dots q_m(x)$ ، حيث $q_i(x)$ كثيرات حدود غير قابلة للتحويل على F ، من أجل $1 \leq i \leq m$ ، وإذا كان α_i المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $q_i(x)$ ، $1 \leq i \leq m$.

لنضع الآن $P_i(x) = \alpha_i^{-1}.q_i(x)$ و $\alpha = \alpha_1.\alpha_2 \dots \alpha_m$ فنجد أن $f(x)$ تكتب على شكل حاصل ضرب كثيرة حدود غير قابلة للتحويل على F ، أي أن :

$$f(x) = \alpha P_1(x).P_2(x) \dots P_m(x)$$

لنبرهن الآن على وحدانية التحليل (*) :

نفرض أن :

$$f(x) = \alpha P_1(x).P_2(x) \dots P_m(x)$$

$$= \beta q_1(x).q_2(x) \dots q_t(x)$$

فإن $\alpha = \beta$ ، لأن كلاً منهما معامل رئيسي لكثيرة الحدود $f(x)$ ، وبالتالي ، فإن $P_1(x)$ تقسم إحدى كثيرات الحدود $q_j(x)$ ، ولتكن $q_1(x)$ ، وبما أن $q_1(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحويل على F ، يكون :

$$q_1(x) = \gamma_1 P_1(x) ، حيث $\gamma_1 \in F$ ، وبما أن كل من $P_1(x)$ و $q_1(x)$ كثيرة حدود$$

واحدية (فرضاً) فإن $\gamma_1 = 1$ ، أي أن $P_1(x) = q_1(x)$ وبالتالي فإن :

$$P_1(x).P_2(x) \dots P_m(x) = P_1(x).q_2(x) \dots q_t(x)$$

باختصار طرفي العلاقة السابقة على $P_1(x)$ نحصل على :

$$P_2(x) \dots P_m(x) = q_2(x) \dots q_t(x)$$

وباتباع نفس الطريقة السابقة نجد : $q_2(x) = P_2(x)$ ، وهكذا نجد أن :

$m = t$ و $P_i(x) = q_i(x)$ لكل $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq t$ مع إمكانية الترتيب للعوامل.

مثال (20) :

لتكن حلقة كثيرات الحدود $(Z_5[x], +, \cdot)$ على الحقل $(Z_5, +, \cdot)$ ، أثبت أن كثيرة

الحدود :

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \in Z_5[x]$ ، تتحلل بشكل وحيد إلى حاصل ضرب كثيرات حدود غير قابلة للتحليل على الحقل Z_5 .

الحل :

إن $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x + 1)(x - 1)^3$ وهي العوامل غير القابلة للتحليل على الحقل Z_5 (عدا الضرب بعدد ثابت في Z_5) ، فمثلاً يكون :

$(x + 1)(x - 1)^3 = (x - 1)^2(4x - 4)(5x + 5)$ المثال التالي ، يقدم ، طريقة أخرى لإثبات أن كثيرة حدود على حقل ما غير قابلة للتحليل .

مثال (21) :

أثبت أن كثيرة الحدود $f(x) = x^5 + 2x^2 + 1$ في $Q[x]$ غير قابلة للتحليل .

الحل :

لدينا أولاً :

$f(x) = x^5 + 2x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e)$ بإجراء عملية الضرب في الطرف الأيمن ثم إجراء المطابقة مع الطرف الأيسر نحصل على المعادلات التالية :

$a + c = 0$, $d + ac + b = 0$, $e + ad + bc = 0$, $a.e + b.d = 0$, $b.e = 1$ المعادلة الأخيرة تعطي $b = e = \pm 1$ ، وبالتالي فإن آخر معادلتين تعطيان $a + d = 0$.

وبسبب $a + c = 0$ أيضاً ، فالمعادلة الثانية تأخذ الشكل $-a - a^2 + b = 0$. وهكذا a جذر صحيح لـ $x^2 + x - b$ ، حيث أن $b = \pm 1$. وباستخدام مبرهنة الجذور النسبية (الكسرية) نجد أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل .

معيار جاوس (مأخوذة جاوس) (Gauss's Lemma)

إذا كانت $f(x) \in Z[x]$ كثيرة حدود بدائية على الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، فإن ، الشرط اللازم ، والكافي لكي تكون $f(x)$ قابلة للتحليل على Z ، هو أن تكون $f(x)$ قابلة

للتحليل على الحلقة $(Q, +, \cdot)$.

البرهان :

من الواضح ، أنه إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود قابلة للتحليل في $Z[x]$ ، فإنها قابلة للتحليل على $Q[x]$. لنبرهن الآن على العكس :

نفرض أن $f(x) = g(x).h(x)$ ، حيث أن :

$$g(x).h(x) \in Q[x] \quad , \quad \deg h(x) < \deg f(x) \quad , \quad 1 \leq \deg g(x)$$

لنوجد المضاعف المشترك لمقامات معاملات الحدود وبإخراجها خارج قوسين نجد أن :

$$f(x) = \frac{a}{b} (q(x).r(x)) \quad \text{حيث أن } a, b \text{ من } Z \text{ ، و } q(x), r(x) \text{ من } Z[x]$$

كثيرتي حدود بدائيتين ، وبالتالي فإن $q(x).r(x)$ كثيرة حدود بدائية أيضاً ، وبالتالي يكون لدينا :

$$b.f(x) = a (q(x).r(x))$$

ومنه يكون $a = b$ ، إذن $f(x) = q(x).h(x)$ قابلة للتحليل على Z .

نلاحظ من معيار جاوس السابق ، أنه من الصعب تطبيق هذا الاختبار ، لذا وجدت اختبارات أسهل ، من هذه الاختبارات ، منها اختبار اينشتاين .

المعيار التالي ، والمسمى بمعيار اينشتاين (فرديناند اينشتاين (1823-1852) وكان تلميذاً لجاوس) يبين لنا وبدلالة عدد أولي معطى فيما إذا كانت كثيرة حدود ما على حقل ما غير قابلة للتحليل .

معيار اينشتاين (Eisenstein's Criterion) :

لتكن كثيرة الحدود $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ في $Z[x]$ ، حيث

$n \geq 1$ ، وبفرض أن P عدد أولي معطى ، بحيث يتحقق ما يلي :

$$(1) \quad P \text{ يقسم الأعداد } a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$$

$$(2) \quad P \text{ لا يقسم العدد } a_n$$

(3) P^2 لا يقسم a_0

عندئذ كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.
قبل أن نقدم برهان هذا المعيار نقدم المثال التوضيحي لهذا المعيار .

مثال (22) :

مستخدماً معيار اينشتاين ، بين فيما إذا كانت كثيرة الحدود :

$$f(x) = 2x^5 + 27x^3 - 18x + 12 \in Z[x]$$

حيث $P = 3$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.

الحل :

لدينا : $a_0 = 12 , a_1 = -18 , a_2 = 27 , a_3 = a_n = 2 , P = 3$

لنطبق الشروط الواردة في التعريف السابق :

$$(1) \quad P = 3 \text{ يقسم } 12 \text{ و } -18 \text{ و } 27$$

$$(2) \quad 3 \text{ لا يقسم } a_n = 2$$

$$(3) \quad P^2 = 9 \text{ لا يقسم } 12$$

بما أن الشروط محققة ، إذن $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.

لنبرهن الآن مبرهنة اينشتاين السابقة .

إذا كانت كثيرة الحدود قابلة للتحليل في الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، وهذا يعني أنه يمكن

كتابة $f(x) = g(x).h(x)$ في $Z[x]$ ، حيث أن :

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$$

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_t x^t$$

لكل b_i , c_j من Z و $1 \leq j \leq t , 1 \leq i \leq m$.

وبما أن $t, m > 0$ ، فإن $n = t + m$ ، ومن تعريف حاصل ضرب كثيرتي حدود ،

نجد أن $a_0 = b_0 c_0$ ، وبما أن P/a_0 و P^2 لا يقسم a_0 ، فإن P يقسم إما b_0 أو c_0 .

ولنفرض مثلاً أن P/b_0 و P لا يقسم c_0 ومن كون P لا يقسم a_n ، حيث

. b_0, b_1, \dots, b_m الصحيحة $a_n = b_m \cdot c_t$ ، فإن P لا يمكن أن يقسم كلاً من الأعداد الصحيحة
ولنفرض أن s أصغر عدد صحيح حيث P لا يقسم b_s وبما أن :

$$a_s = b_0 c_s + b_1 c_{s-1} + \dots + b_{s-1} c_1 + b_s c_0$$

ولدينا : $P/a_s, P/b_0, P/b_1, \dots, P/b_{s-1}$ ، إذن $P/b_s c_0$ ، ومن كون P لا يقسم c_0 ، نجد أن P يقسم b_s ، وهذا تناقض ، وبالتالي فإن $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.

ملاحظة (6) :

يمكن صياغة اختبار اينشتاين بالشكل التالي :

ليكن $P \in \mathbb{Z}$ عدداً أولياً ، وبفرض أن كثيرة الحدود $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ في $\mathbb{Z}[x]$.

وإذا كان $a_n \not\equiv 0 \pmod{P}$ ، لكن $a_i \equiv 0 \pmod{P}$ ، من أجل $i < n$ ،
و $a_0 \not\equiv 0 \pmod{P^2}$ ، عندئذٍ $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على Q .
مثال (23) :

$$f(x) = 25x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 12 \quad \text{إن كثيرة الحدود :}$$

وبأخذ $P = 3$ ، نجد ما يلي :

$$25 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$-9, 3, -12 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$-12 \not\equiv 0 \pmod{9}$$

إذن $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل .

مثال (24) :

إذا كان P عدداً أولياً ، وإذا كانت كثيرة الحدود :

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

فإن $\Phi_p(x)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.

الحل :

لنبرهن أولاً أن كثيرة الحدود $\Phi_p(x+1)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$ بدلاً من $\Phi_p(x)$ ، لأنه إذا كانت $\Phi_p(x) = g(x).h(x)$ فإن :

$$\Phi_p(x+1) = g(x+1).h(x+1)$$

الآن :

$$(x-1)\Phi_p(x) = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1) = x^p - 1$$

لنبدل كل x بـ $x+1$ في العلاقة السابقة فنحصل على :

$$x\Phi_p(x+1) = (x+1)^p - 1$$

أي أن :

$$\Phi_p(x) = \frac{(x+1)^p - 1}{x}$$

باستخدام نظرية ذي الحدين نجد أن :

$$\Phi_p(x+1) = x^{p-1} + \binom{p}{1}.x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}.x + p$$

وباستخدام معيار اينشتاين السابق، نجد أن p يقسم $\binom{p}{p-i}$ لكل $1 \leq i \leq p-1$.

كما يمكن التحقق من بقية الشروط الواردة في معيار اينشتاين ، إذن كثيرة الحدود $\Phi_p(x+1)$ غير قابلة للتحليل على $Q[x]$.

ملاحظة (7) :

كثيرة الحدود السابقة $\Phi_p(x)$ تسمى بكثيرة حدود سايكوموتك Cyclotomic polynomial .

سندرس الآن اختباراً آخر ، لا يقل شأناً عن سابقه لكثيرات الحدود غير القابلة للتحليل على الحلقة $Z[x]$ وذلك بدلالة عدد أولي معطى .

اختبار لكثيرات الحدود القياسية غير القابلة للتحليل :

Modular Irreducibility test

لتكن كثيرة الحدود $f(x)$ من $Z[x]$ ، وبفرض أن P عدد أولي معطى ، وبحيث

يتحقق ما يلي :

(1) P لا يقسم المعامل الرئيسي لـ $f(x)$.

(2) إن $\overline{f(x)}$ غير قابل للتحويل في الحلقة $Z_p[x]$ ، حيث أن :

$$f(x) \equiv \overline{f(x)} \pmod{P}$$

عندئذ تكون كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحويل في $Q[x]$.

البرهان :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in Z[x] \quad \text{لتكن}$$

فإن :

$$\overline{f(x)} = \overline{a_0} + \overline{a_1} x + \dots + \overline{a_n} x^n \in Z_p[x]$$

وبالتالي ، يكون : $\deg \overline{f(x)} = \deg f(x)$ (من (1)).

إذا كانت $f(x)$ قابلة للتحويل في الحلقة $Q[x]$ ، فهذا يعني أنه بالإمكان كتابة $f(x)$

بالشكل :

$$f(x) = g(x).h(x) \text{ في } Z[x] \text{ . وبالتالي يكون لدينا : } \overline{f(x)} = \overline{g(x)}.\overline{h(x)}$$

وهذا يناقض كون $\overline{f(x)}$ غير قابلة للتحويل في $Z_p[x]$ ، وبسبب كون :

$$\deg \overline{g(x)} \leq \deg g(x) < \deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$$

وبشكل مشابه يكون أيضاً :

$$\deg \overline{h(x)} < \deg \overline{f(x)}$$

مثال (25) :

أثبت أن كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 2$ غير قابلة للتحويل في

الحلقة $(Q[x], +, \cdot)$.

الحل :

بأخذ $P = 3$ ، يكون $\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + 2$ ونلاحظ أن $\overline{f(x)}$ لا تملك أي جذر

في $Z_3[x]$ ، وبتطبيق الاختيار السابق تكون $f(x)$ غير قابلة للتحويل في $Q[x]$.

(10-4) حلقة القسمة لكثيرات الحدود فوق حقل :

Factor rings of polynomials over a field

نعلم أن كل مثالية لـ Z لها الشكل $n.Z$ ، حيث أن $n \geq 0$ ، وإذا كان $n > 0$ فإن حلقة القسمة تكون $Z/n.Z = Z_n$ ، سندرس الآن حلقة القسمة لكثيرات الحدود على حقل ، أخذين بعين الاعتبار الفكرة السابقة .

مبرهنة (15) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وإذا كانت $I \neq 0$ مثالية لـ $F[x]$ ، عندئذ توجد كثيرة حدود واحدة $h(x)$ في $f(x)$ بحيث يكون :

$$A = \langle h(x) \rangle = h(x) \cdot F[x]$$

نتيجة (3) :

$$R = R[x]/I = \{ \overline{a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1}} ; a_i \in F \}$$

البرهان :

ليكن $\overline{f(x)} \in R = R[x]/I$ ، حيث أن $f(x) \in F[x]$ ، باستخدام خوارزمية القسمة ، توجد $q(x)$ في $F[x]$ ، بحيث يكون :

$$f(x) = q(x).h(x) + (a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}) ; a_i \in R$$

وبسبب كون $h(x) \in I$ ، يكون لدينا $\overline{h(x)} = \overline{0}$ في R ، لذلك :

$$\overline{f(x)} = \overline{a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}} = \overline{a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1}}$$

ملاحظة (8) :

إذا كان :

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1} = b_0 + b_1 t + \dots + b_{m-1} t^{m-1}$$

في $R[x]/I$ ، حيث أن المثالية $I \neq 0$ ، عندئذ $a_i = b_i$ من أجل جميع قيم i .

نتيجة (4) :

في حلقة القسمة $R[x]/I$ ، حيث $I \neq 0$ ، إذا كان :

$$h(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

فإن $h(t) = 0$ ، حيث أن $t = x + I$.

البرهان :

$$h(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

بما أن :

و $t = x + I$ ، ولنكتب $a = \overline{a} = a + I$ حيث $a \in F$ (حقل F) ، وبالتالي يكون

لدينا :

$$\begin{aligned} h(t) &= c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1} + t^m \\ &= \overline{c_0} + \overline{c_1} \cdot \overline{x} + \dots + \overline{c_{m-1}} \cdot \overline{x}^{m-1} + \overline{x}^m \\ &= \overline{c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m} \\ &= \overline{h(x)} = \overline{0} \end{aligned}$$

ومنه يكون $h(t) = 0$ في $R[x]/I$.

مبرهنة (16) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، ولتكن $h(x)$ كثيرة حدود واحدة في $F[x]$ من الدرجة

$m \geq 1$ ، عندئذٍ حلقة القسمة $F[x]/\langle h(x) \rangle$ تعطى بالشكل :

$$F[x]/\langle h(x) \rangle = \{a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1} : a_i \in F ; h(t) = 0\}$$

بالإضافة إلى ذلك ، العناصر من $F[x]/\langle h(x) \rangle$ تكتب بشكل وحيد ، وهذا

يعني :

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1} = b_0 + b_1 t + \dots + b_{m-1} t^{m-1} \Leftrightarrow a_i = b_i$$

من أجل جميع قيم i .

الأمثلة التالية ، توضح المبرهنة السابقة :

مثال (26) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وإذا كانت $h(x) = x^2 + 1$ ، عندئذٍ يكون :

$$F[x]/\langle x^2 + 1 \rangle = \{a + b t : a, b \in F , t^2 + 1 = 0\}$$

إن عمليتي الجمع والضرب تكونا :

$$(a + b t) + (c + d t) = (a + c) + (b + d) t ; t^2 = -1$$

$$(a + b t) \cdot (c + d t) = a c + (ad + bc) t + bd t^2 \\ = (ac - bd) + (ad + bc) t$$

وإذا كان $F = R$ ، وبوضع i مكان t نحصل على حلقة الأعداد المركبة C .

مثال (27) :

صف حلقة القسمة $F[x] / \langle x^2 \rangle$ ، حيث أن F حقلاً ما .

الحل :

بتطبيق المبرهنة السابقة ، حيث أن $h(x) = x^2$ و $m = 2$ يكون :

$$F[x] / \langle x^2 \rangle = \{a + b t : a, b \in F, t^2 = 0\}$$

كما أن في R يكون :

$$(a + b t) + (c + d t) = (a + c) + (b + d) t$$

بالإضافة إلى ذلك ، وبسبب $t^2 = 0$ تكون عملية الضرب من الشكل :

$$(a + b t) \cdot (c + d t) = a c + (ad + bc) t$$

وبأخذ الحالة الخاصة : $F = Z_2 = \{0, 1\}$ ، نجد :

$$F[x] / \langle x^2 \rangle = \{0, 1, t, t + 1\}$$

هي حلقة بأربعة عناصر . بسبب أن $1 + 1 = 0$ في Z_2 و $t^2 = 0$ ، فإن جدولي

الجمع والضرب يكونا بالشكل :

\times	0	1	t	1+t	$+$	0	1	t	1+t
0	0	0	0	0	0	0	1	t	1+t
1	0	1	t	1+t	1	1	0	1+t	t
t	0	t	0	t	t	t	1+t	0	1
1+t	0	1+t	t	1	1+t	1+t	t	1	0

مبرهنة (17) :

لنكن $h(x)$ كثيرة حدود واحدة من الدرجة $m \geq 1$ في $F[x]$ حيث أن $(F, +, \cdot)$

حقلًا ما ، عندئذٍ تتكافأ الشروط التالية :

$$F[x] / \langle h(x) \rangle \text{ حقل} \quad (1)$$

$$F[x] / \langle h(x) \rangle \text{ حلقة تامة} \quad (2)$$

$$h(x) \text{ غير قابلة للتحليل على الحقل } F \quad (3)$$

البرهان :

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

واضح لأن كل حقل هو حلقة تامة .

$$(3) \Leftrightarrow (2)$$

لسهولة الكتابة ، سنكتب $f(x) = f$ و $I = \langle h \rangle$. إذا كان $h = f \cdot g$ في $F[x]$ و :

$$(f + I)(g + I) = f \cdot g + I = h + I = 0 + I$$

في $F[x]/I$ ، ومن (2) يكون $f + I = 0 + I$ أو $g + I = 0 + I$ ، وبالتالي يكون $f \in I$ أو $g \in I$.

إذا كان $f \in I$ ، عندئذٍ $f = q \cdot h$ ، من أجل $q \in F[x]$. وهكذا $h = f \cdot g = q \cdot h \cdot g$ ، لذا (بسبب حلقة تامة $F[x]$) $1 = q \cdot g$ ، وهذا يعني أن $\deg g = 0$ ، وبشكل مشابه إذا كان $g \in I$ فإن $\deg f = 0$. وهذا يؤدي إلى (3) .

$$(1) \Leftrightarrow (3)$$

لكن $f + I \neq 0$ ، حيث أن $f \in F[x]$ ، عندئذٍ $f \notin I$ ، لذا فإن h لا تقسم f .
لنكن $d = \gcd(h, f)$ ، عندها يكون d/h ، لذا وبسبب h غير قابل للتحليل و d, h أوليتان ، يكون ، إما $h = 1$ أو $h = d$. لكن $h = d$ ، وهذا يؤدي إلى أن h/f .
وهكذا $d = 1$ ، وبالتالي يوجد u, v في $F[x]$ بحيث يكون $1 = uh + vf$. عندئذٍ يكون :

$$(v + I)(f + I) = 1 + I \quad (1)$$

مثال (28) :

أنشئ حقلاً مؤلف من أربعة عناصر فقط .

الحل :

إن كثيرة الحدود $x^2 + x + 1$ لا تملك جذور في الحلقة Z_2 ، كما أنها غير قابلة للتحليل في الحلقة Z_2 . وبالتالي ، يمكن أخذ الحقل F بالشكل :

$$F = \frac{Z_2[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle} = \{a + bt : a, b \in Z_2, t^2 + t + 1 = 0\}$$

وهكذا يكون F :

$$F = \{0, 1, t, 1+t\}$$

وبما أن $1 + 1 = 0$ في الحلقة Z_2 و $t^2 = t + 1$. فإن جدولتي العمليتين الجمع والضرب يكونان :

\times	0	1	t	1+t	$+$	0	1	t	1+t
0	0	0	0	0	0	0	1	t	1+t
1	0	1	t	1+t	1	1	0	1+t	t
t	0	t	1+t	1	t	t	1+t	0	1
1+t	0	1+t	1	t	1+t	1+t	t	1	0

مبرهنة (18) :

إذا كانت $I = \langle f \rangle$ مثالية في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$ على الحقل $(F, +, \cdot)$ ، الشرط اللازم والكافي ، لكي تكون I مثالية أعظمية في $F[x]$ هو أن تكون كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل على الحقل $(F, +, \cdot)$.

البرهان :

لنبرهن أولاً ، أن $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على الحقل F ، علماً أن I مثالية أعظمية .

ليكن $I = \langle f \rangle \neq \{0\}$ مثالية أعظمية في $F[x]$ ، فإن $\langle f \rangle \neq F[x]$ ، وهذا يعني أن $f(x) \notin F$ ، لستكن $f(x) = g(x).h(x)$ حيث أن $g(x), h(x) \notin F[x]$ ،

وبما أن $\langle f \rangle$ مثالية أعظمية فهي أولية ، ومن العلاقة : $g(x).h(x) \in \langle f \rangle$ ، نجد أنه إما $g(x) \in \langle f \rangle$ أو $h(x) \in \langle f \rangle$ ، وتكون $f(x)$ إحدى العوامل لكثيرتي الحدود $g(x)$ أو $h(x)$ أي أن $\deg f < \deg g$ أو $\deg f < \deg h$ ، وهذا تناقض مع مفهوم قابلية التحليل لكثيرات الحدود ، إذن $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على الحقل F .

لنبرهن الآن أن $I = \langle f \rangle$ مثالية أعظمية ، علماً أن كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل .

لنكن J مثالية في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$ ، حيث $\langle f \rangle \subseteq J \subseteq F[x]$.

بما أن J مثالية رئيسية فيكون $I = \langle g \rangle$ حيث أن $g(x) \in I$ و $f(x) = g(x).h(x)$ حيث $h(x) \in F[x]$.

بما أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على الحقل F ، إذن إما $\deg g = 0$ أو $\deg h = 0$ ، فإذا كان $\deg g = 0$ فإن $g(x) = c \in F$ حيث c ثابت ، وبالتالي فإن $g(x)$ عنصر وحدة في الحلقة $F[x]$ ، وبالتالي :

$\langle g \rangle = J = F[x]$. أما إذا كان $\deg h = 0$ ، أي أن $h(x) = d \in F$ حيث d ثابت ، فيكون : $f(x) \in \langle f \rangle = \left(\frac{1}{d}\right).f(x) \in \langle f \rangle$ ، أي أن $J = \langle f \rangle$ ، وبالتالي يكون $\langle f \rangle \subset J \subset F[x]$ ، وهذا غير ممكن ، إذن $\langle f \rangle$ مثالية أعظمية في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$.

ينتج من المبرهنة السابقة النتيجة الهامة التالية :

نتيجة (5) :

إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما و $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على F ، عندئذ $F[x]/\langle f \rangle$ يكون حقلاً .

إن برهان هذه النتيجة ينتج من المبرهنة السابقة ، ومن المبرهنة : تكون الحلقة التامة R/I حقلاً ، إذا كانت المثالية I أعظمية .

ننهي هذا الفصل بتعريف حلقة كثيرات الحدود بمتغيرين y, x .

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن $R[x]$ حلقة كثيرات الحدود على الحلقة R في المتغير x ، لنشكل الحلقة $(R[x])[y], +, \cdot$ على الحلقة $R[x]$ في المتغير y ، والتي نرمز لها عادةً بـ $(R[x, y], +, \cdot)$. ويطلق عليها اسم حلقة كثيرات الحدود بمتغيرين y, x .

كثيرة حدود بمتحولين من $R[x, y]$ نكتب بالشكل :

$$f(x, y) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$$

$$= a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + a_{11} x y + a_{02} y^2 + \dots$$

كما أن الشرط اللازم والكافي، لكي يكون $\sum a_{ij} x^i y^j = \sum b_{ij} x^i y^j$ هو أن يكون $a_{ij} = b_{ij}$ ، لكل i, j .

مثال (29) :

إن

$$f(x, y) = 2x - 3y + 3x^2 y - 4x y^4 + 1 \in R[x, y]$$

كثيرة حدود بمتحولين حقيقيين هما x و y .

الفصل الخامس

الفضاءات الحلقية (الحلقات)

Modules

الفصل الخامس

الفضاءات الحلقية (الحلقيات)

Modules

يعد الفضاء الحلقي على حلقة ما ، من المفاهيم الحديثة نسبياً في البنى الجبرية ، إذ يرجع ظهوره إلى منتصف القرن التاسع عشر الميلادي ، وقد ظهر عند دراسة الفضاءات المتجهة على حقل ما .

سنعرض في بداية هذا الفصل بعض المفاهيم والتعاريف للفضاءات الحلقية ثم ندرس الفضاء الحلقي الجزئي ، والمجموع المباشر للفضاءات الحلقية ، وفضاء القسمة الحلقي والتشاكلات والفضاء الحلقي الحر

يمكن الاستفادة من الفضاءات الحلقية على حلقة في مواضيع جبرية عديدة كالزمر الإبدالية ، وجبر - لي وفي المصفوفات وغيرها من العلوم الرياضية والفيزيائية .

(1-5) تعاريف ومفاهيم أساسية :

1- الفضاء الحلقي اليساري (من اليسار) على حلقة Left module over a ring

لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، إذا كانت M مجموعة غير خالية ، وإذا كانت \star عملية جبرية ثنائية معرفة على M ، وإذا كان φ تطبيقاً بالشكل : $\varphi : R \times M \longrightarrow M$ (يسمى عادةً عملية خارجية معرفة على المجموعة M) معرفاً بالشكل : $\varphi(r, m) = r.m$ ، لكل $r \in R$ و $m \in M$ ، فإننا نقول عن M إنه فضاء حلقي يساري بالنسبة للحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا تحققت الشروط التالية :

$$(1) \quad (M, \star) \text{ زمرة إبدالية}$$

$$(2) \quad \varphi(r, x \star y) = \varphi(r, x) \star \varphi(r, y)$$

$$(3) \quad \varphi(r+s, x) = \varphi(r, x) \star \varphi(s, x)$$

$$(4) \quad \varphi(r.s, x) = \varphi(r, \varphi(s, x))$$

وذلك من أجل أي s, r من R و y, x من M .

لاحظ ، أنه كان بالإمكان كتابة الشروط السابقة بالشكل :

$$(1) \quad (M, \star) \text{ زمرة إبدالية}$$

$$(2) \quad r.(x + y) = r.x + r.y$$

$$(3) \quad (r + s).x = r.x + s.x$$

$$(4) \quad (r.s) x = r.(s.x)$$

لكل s, r من R و y, x من M .

2- إذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ ذات عنصر وحدة 1 ، وإذا تحقق ، بالإضافة إلى الشروط الأربعة السابقة ، الشرط التالي : $\varphi(1, x) = x$ لكل $x \in M$ ، أي تحقق الشرط : $1.x = x$ ، فإننا نقول عن M إنه فضاء حلقي يساري واحدي (بمحايد) على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

3- الفضاء الحلقي اليميني على حلقة Right module over aring

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، إذا كانت M مجموعة غير خالية ، وإذا كانت \star عملية جبرية ثنائية معرفة على M ، وإذا كان التطبيق φ معرفاً بالشكل : $\varphi : M \times R \longrightarrow M$ ، فإننا نقول عن M إنه فضاء حلقي يميني بالنسبة للحلقة $(R, +, \cdot)$ إذا تحققت الشروط التالية :

$$(1) \quad (M, \star) \text{ زمرة إبدالية}$$

$$(2) \quad \varphi(x \star y, r) = \varphi(x, r) \star \varphi(y, r) \text{ ، أي أن } (x \star y) . r = x.r \star y.r$$

$$(3) \quad \varphi(x, r+s) = \varphi(x, r) \star \varphi(x, s) \text{ ، أي أن } x .(r+s) = x.r \star x.s$$

$$(4) \quad \varphi(x, r.s) = \varphi(\varphi(x, r), s) \text{ ، أي أن } x.(a.b) = (x.a).b$$

وذلك لكل s, r من R و y, x من M .

4- إذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد (ذات عنصر وحدة 1) ، وإذا تحقق بالإضافة إلى الشروط الأربعة السابقة ، الشرط التالي : $\varphi(x, 1) = x$ لكل x من M أي أن $x.1 = x$ ، فإننا نقول عن M إنه فضاء حلقي يميني بمحايد (واحدي)

على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

5- إذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ إبدالية ، وكان M فضاءً حلقياً يسارياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإنه يتحول إلى فضاء حلقى من اليمين على R . وهذا يعني أن $x \cdot r = r \cdot x$ ، لكل x من M و r من R .

نسمي عادةً عناصر الحلقة في التعريف السابق بعناصر قياسية ، كما نسمي عناصر الفضاء الحلقى M بمتجهات .

6- إن شروط الفضاء الحلقى هي شروط الفضاء المتجهي نفسها ، والفارق الوحيد بينهما هو أن الفضاء الحلقى M معرفاً على حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، بينما فضاء المتجهات يكون معرفاً على حقل ما وليكن $(F, +, \cdot)$.

7- من الضروري التمييز بين العملية الجبرية الثنائية \star المعرفة على M وبين العملية الجبرية الثنائية $(+)$ المعرفة على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، علماً أننا من الآن فصاعداً سنرمز لها بالرمز نفسه .

8- الشرط الأول الوارد في تعريف الفضاء الحلقى M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ يبين لنا أن زمرة إبدالية ، وبالتالي ، فإن كما في أية زمرة إبدالية ، مجموع عدد من الأشعة لا يتعلق بترتيب الحدود في هذا المجموع ، كما أنه لا يتعلق بوضع الأقواس فيه ، بالإضافة إلى ذلك يوجد في M متجه وحيد وليكن x_1 يكون من أجله $x = x + x_1$ لكل x من M ، سنرمز للمتجه x_1 بـ 0 ونسميه بالمتجه الصفري في الفضاء الحلقى M أو نسميه صفر الفضاء الحلقى M .

كما أنه من أجل أي متجه x من M ، يوجد متجه وحيد وليكن x_2 يكون من أجله $x + x_2 = 0$ ، نرمز للمتجه x_2 بـ $-x$ ونسميه معكوس (نظير) x .

9- بالاستفادة من الملاحظة السابقة ، إذا كان y, x متجهين ما من M ، فإن :

$$0 + 0 = 0 , \quad x + (-x) = 0 , \quad (x + y) + (1 - x) + (-y) = 0$$

وبالتالي ، فإن :

$$0 = -0 , \quad x = -(-x) , \quad -(x + y) = (-x) + (-y)$$

10- ليكن M فضاء حلقي ما على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، نعرف العملية الثنائية (-)

على M بالشكل :

$$x - y = x + (-y) \quad , \quad \text{لكل } y, x \text{ من } M$$

وتسمى هذه العملية بعملية طرح (فرق) المتجهات .

(2-5) أمثلة :

(1) كل حلقة بمحايد ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ تشكل فضاءً حلقياً على نفسها .

الحل :

لنعرف التطبيق $\varphi : R \times R \longrightarrow R$ بالشكل $\varphi(x, r) = x.r$ لكل r, x من R وفي هذه الحالة تتطابق المجموعتان R, M وبسهولة يمكن التأكد من الشروط الواردة في مفهوم الفضاء الحلقي اليساري أو اليميني .

(2) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كانت A مجموعة جزئية من R

وغير خالية ، ولنفرض أن M مجموعة كل التطبيقات التالية :

$$\varphi : A \longrightarrow R$$

ولنعرف على M عملية ثنائية داخلية (+) بالشكل :

$$(\varphi + \Psi)(x) = \varphi(x) + \Psi(x)$$

لكل x من A و f, g من M ، وعملية خارجية بالشكل : $(r \varphi)(x) = r \varphi(x)$ لكل r من R و φ, x من M . المطلوب أثبت أن M فضاء حلقي بمحايد على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

الحل :

1- يمكن البرهان بسهولة أن : $(M, +)$ زمرة إبدالية .

2- ليكن φ, Ψ عنصرين ما من M ، وإذا كان s, r عنصرين ما من R ، فإن :

$$(r(\varphi + \Psi))(x) = r.((\varphi + \Psi)(x)) = r.(\varphi(x) + \Psi(x))$$

$$= r.\varphi(x) + r.\Psi(x) = (r.\varphi)(x) + (r.\Psi)(x)$$

$$= (r.\varphi + r.\Psi)(x)$$

لكل x من A . أي أن :

$$r(\varphi + \Psi) = r.\varphi + r.\Psi$$

$$\begin{aligned} ((r+s)\varphi)(x) &= (r+s).\varphi(x) = r.\varphi(x) + s.\varphi(x) = (r.\varphi)(x) + (s.\varphi)(x) \quad -3 \\ &= (r.\varphi + s.\Psi)(x) \end{aligned}$$

لكل x من A ، إذن : $(r+s)\varphi = r.\varphi + s.\varphi$

$$\begin{aligned} ((r.s)\varphi)(x) &= (r.s).\varphi(x) = r.(s.\varphi(x)) = r.((s.\varphi)(x)) \quad -4 \\ &= (r.(s.\varphi))(x) \end{aligned}$$

لكل x من A ، إذن $(r.s)\varphi = r.(s.\varphi)$

نستنتج مما سبق أن M فضاء حلقي على الحلقة $(R,+,.)$ ، لنثبت أخيراً أنه محايد.

لنرمز لعنصر الوحدة في الحلقة $(R,+,.)$ بالرمز 1 ، وبالتالي يكون لدينا :

$$(1.\varphi)(x) = 1.\varphi(x) = \varphi(x)$$

لكل $x \in A$ و $\varphi \in M$ ، أي أن $1.\varphi = \varphi$.

(3) لتكن $(Z,+,.)$ حلقة الأعداد الصحيحة Z ، ولنعرف التطبيق φ على

المجموعة غير الخالية M بالشكل :

$$\varphi : Z \times M \longrightarrow M$$

لكل x من M و r من Z ، $\varphi(r,x) = r.x$

إن M فضاء حلقي محايد على Z .

الحل :

بسهولة ، نرى أن ، $(M,+,.)$ زمرة إبدالية . كما يمكن التحقق من الشروط التالية :

$$r(x+y) = rx + ry$$

$$(r+s)x = r.x + s.y$$

$$(r.s)(x) = r.(s.x)$$

إذا كانت $(Z,+,.)$ حلقة محايد (1)، فإن $1.x = x$. لكل y,x من M و r,s من Z .

مبرهنة (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، إذا كان M فضاءً حلقياً على R ، ولنرمز بـ O و O' لـ صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ ولصفر الفضاء الحلقى M على الترتيب ، عندها يكون :

$$(1) \quad O \cdot x = O' \quad \text{لكل } x \text{ من } M$$

$$(2) \quad r \cdot O' = O' \quad \text{لكل } r \text{ من } R$$

$$(3) \quad (-r) \cdot x = r(-x) = -r \cdot x \quad \text{إذا كان } x \in M \text{ و } r \in R \text{ ، فإن :}$$

$$(4) \quad \left(\sum_{i=1}^s r_i \right) \cdot x = \sum_{i=1}^s r_i \cdot x \quad \text{لكل } x \text{ من } M \text{ و } r_1, r_2, \dots, r_s \in R \text{ ، حيث أن } s \geq 2$$

$$(5) \quad r \cdot \left(\sum_{i=1}^s x_i \right) = \sum_{i=1}^s r \cdot x_i \quad \text{لكل } r \text{ من } R \text{ و } x_1, x_2, \dots, x_s \in M \text{ و } s \geq 2$$

البرهان :

(1) ليكن x متجهاً ما من M ، فإن :

$$O \cdot x + O \cdot x = (O + O) \cdot x = O \cdot x = O \cdot x + O'$$

ومنه يكون $O \cdot x = O'$

(2) ليكن r عنصراً ما من R ، فإن :

$$a \cdot O' = a(O' + O') = aO' = aO' + O'$$

وبالتالي يكون : $aO' = O'$

(3) ليكن x متجهاً ما من M ، وإذا كان r عنصراً ما من R ، وبما أن :

$$r \cdot x + (-r) \cdot x = (r + (-r)) \cdot x = O \cdot x = O'$$

فإن :

$$(-r) \cdot x = -(r \cdot x) \quad (1)$$

وبما أن :

$$r \cdot x + r(-x) = r(x + (-x)) = r \cdot O' = O'$$

فإن :

$$r(-x) = -(r.x) \quad (2)$$

بمقارنة العلاقتين (1) و(2) نجد أن :

$$(-r).x = r(-x) = -(r.x)$$

(4) ليكن x عنصراً ما من M ، وإذا كان r_1, r_2, \dots, r_s عناصر من R ، فإن :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^s r_i \right) . x &= \left(r_1 + \sum_{i=2}^s r_i \right) . x = r_1 . x + \left(\sum_{i=2}^s r_i \right) . x \\ &= \dots = r_1 . x + \dots + r_s . x = \sum_{i=1}^s r_i . x \end{aligned}$$

(5) إذا كان r عنصراً ما من R ، وإذا فرضنا أن x_1, x_2, \dots, x_s عناصر من M ،

فإن :

$$\begin{aligned} r . \left(\sum_{i=1}^s x_i \right) &= r . \left(x_1 + \sum_{i=2}^s x_i \right) = r . x_1 + r . \sum_{i=2}^s x_i \\ &= \dots = r x_1 + \dots + r x_s = \sum_{i=1}^s r . x_i \end{aligned}$$

نتيجة (1) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وليكن M فضاءً حلقياً بمحايد على R ، ولنفرض أن r من R ، وإذا كان العنصر r قابلاً للعكس في R ، وإذا كان y, x عنصرين من M ، عندئذٍ ، إذا كان : $r.x = r.y$ ، فإن : $x = y$

البرهان :

لنرمز لعنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالرمز 1 .

بما أن $r.x = r.y$ ، فإن :

$$r^{-1} . (r.x) = r^{-1} . (r.y)$$

$$(r^{-1} . r) . x = (r^{-1} . r) . y$$

$$1.x = 1.y$$

وبالتالي يكون : $x = y$.

نتيجة (2) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا رمزنا لعنصر الوحدة في R بالرمز 1 ، فإن $x = -x$ ، لكل x من M .

البرهان :

بما أن $(-r)x = -(r.x)$ لكل x من M و r من R :

فإن $(-1)x = -(1.x)$ لكل x من M :

وبالتالي يكون $x = -x$.

(3-5) الفضاءات الحلقية الجزئية Submodules :

تعريف (11) الفضاء الحلقى الجزئي على حلقة :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً ما على R ، الفضاء الحلقى الجزئي N من M ، هو مجموعة جزئية غير خالية من M تحقق الشرطين :

(1) لكل x, y من N ، فإن $x - y \in N$:

(2) إذا كان r عنصراً ما من R ، وكان x عنصراً ما من N ، فإن $r.x \in N$:

يتضح من التعريف السابق ، أن الفضاء الحلقى M على حلقة $(R, +, \cdot)$ ، يحوي على الأقل ، فضاءين جزئيين هما $\{0\}$ والفضاء الحلقى M نفسه ، علماً أن 0 هو صفر الفضاء الحلقى M .

ملاحظة (1) :

يمكن دمج الشرطين (1) و(2) الواردين في التعريف السابق ، بالشرط التالي :

يكون N فضاءً حلقياً جزئياً من الفضاء الحلقى M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا وفقط ، إذا تحقق الشرط :

$$\forall x, y \in N, \forall r, s \in R : r.x + s.y \in N$$

مثال (4) :

إذا كانت $(H, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, +)$ ، فإن $(A, +)$ تشكل فضاءً حلقياً

جزئياً من الفضاء الحلقي G على الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، لأن إذا كان $n \in Z$ و $r \in A$ ،
فإن :

$$n.r = \pm (a + a + \dots + a)$$

مثال (5) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وبفرض أن M_2 فضاء حلقي عناصره هي مصفوفات
حقيقية على R ، وإذا كانت $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}; x, y \in R \right\}$ ، فإن N فضاء
حلقي جزئي من M_2 .

الحل :

من الواضح ، أن $\phi \neq N \subseteq M_2$.

وإذا كان $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix}$ عنصرين ما من N ، فإن :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z & -t \\ t & -z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ -y+t & x-z \end{pmatrix} \in N \end{aligned}$$

وإذا كان r من R وكان $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ من N ، فإن :

$$r \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.x & r.y \\ r.(-y) & r.x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.x & r.y \\ -(r.y) & r.x \end{pmatrix} \in N$$

نستنتج مما سبق تحقق الشرطين (1) و(2) الواردين في تعريف الفضاء الحلقي

الجزئي إذن N فضاء حلقي جزئي من M_2 .

نقدم الآن بعض العمليات على الفضاءات الحلقية الجزئية .

أولاً : عملية الجمع :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً ما على R ، وليكن N_1 و N_2

فضاءين حلقيين جزئيين من M ، نسمي المجموعة :

$$\{x \in M : x = x_1 + x_2 ; x_1 \in N_1 , x_2 \in N_2\}$$

بمجموع N_1 و N_2 ، ونرمز لذلك بالرمز $N_1 + N_2$.

يمكن التأكد بسهولة ، أنه إذا كانت N_3, N_2, N_1 فضاءات حلقية جزئية من الفضاء الحلقي M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$N_1 + N_2 = N_2 + N_1$$

$$N_1 + (N_2 + N_3) = (N_1 + N_2) + N_3$$

توضح المبرهنة التالية ، أن حاصل مجموع فضاءين حقيقيين جزئيين هو فضاء حقيقي جزئي من فضاء حقيقي .

مبرهنة (2) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حقيقياً على R ، وبفرض أن N_1 و N_2 فضاءين حقيقيين جزئيين من M ، عندئذٍ يكون $N_1 + N_2$ فضاء حقيقي جزئي من M .

البرهان :

حسب تعريف المجموعة $N_1 + N_2$ ، نجد أن $N_1 + N_2 \subseteq M$ ، $\phi \neq N_1 + N_2$.

ليكن x, y عنصرين ما من $N_1 + N_2$ ، وبالتالي يمكن كتابتهما بالشكل :

$$x = x_1 + x_2 ; \forall x_1 \in N_1 , x_2 \in N_2$$

$$y = y_1 + y_2 ; \forall y_1 \in N_1 , y_2 \in N_2$$

وبالتالي ، فإن :

$$x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in N_1 + N_2$$

ليكن الآن r عنصراً ما من R و x عنصراً ما من $N_1 + N_2$ ، إن العنصر x يكتب بالشكل :

$$x = x_1 + x_2 ; x_1 \in N_1 , x_2 \in N_2$$

وبالتالي فإن :

$$r.x = r(x_1 + x_2) = r x_1 + r x_2 \in N_1 + N_2$$

نستنتج مما سبق أن $N_1 + N_2$ فضاء حلقى جزئى من M على الحلقة $(R, +, \cdot)$.
يمكن تعميم المبرهنة السابقة بالشكل التالي :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كانت $\{N_i\}_{i=1}^n$ أسرة من الفضاءات الحلقية الجزئية من M ، عندئذ يكون : $\sum_{i=1}^n N_i$ فضاء حلقى جزئى من M .

العملية الثانية عملية التقاطع :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وليكن M فضاءً حلقياً على R ، وبفرض أن N_1 و N_2 فضاءين حلقين جزئيين من M ، المجموعة :

$\{x \in N : x \in N_1 , x \in N_2\}$ تسمى تقاطع N_1 و N_2 ويرمز لها بالرمز $N_1 \cap N_2$.

كما في عملية الجمع السابق ، يتضح من التعريف السابق أنه إذا كانت N_3, N_2, N_1 ثلاثة فضاءات حلقية جزئية من M ، فإن :

$$N_1 \cap N_2 = N_2 \cap N_1$$

$$N_1 \cap (N_2 \cap N_3) = (N_1 \cap N_2) \cap N_3$$

المبرهنة التالية ، تثبت أن تقاطع فضاءين حلقين جزئيين من M هو فضاء حلقى جزئى أيضاً .

مبرهنة (3) :

بفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وليكن N_2, N_1 فضاءين حلقين جزئيين من M ، عندئذ $N_1 \cap N_2$ فضاء حلقى جزئى من M .

البرهان :

من تعريف تقاطع فضاءين حلقين جزئيين نجد أن $\phi \neq N_1 \cap N_2 \subseteq M$.

بفرض أن x, y عنصرين ما من $N_1 \cap N_2$ ، فإن $x, y \in N_1$ ، $x, y \in N_2$ ،

وبالتالي فإن :

$$. x - y \in N_1 \cap N_2 : \text{وبالتالي فإن } , x - y \in N_1 , x - y \in N_2$$

ليكن الآن r عنصراً ما من R و x عنصراً ما من $N_1 \cap N_2$ ، وهذا يؤدي إلى أن $x \in N_1$ و $x \in N_2$ ، وبالتالي ، فإن : $r.x \in N_1$ ، $r.x \in N_2$ ، ومنه يكون

$$. r.x \in N_1 \cap N_2$$

نستنتج مما سبق ، أن $N_1 \cap N_2$ فضاء حلقي جزئي .

يمكن تعميم المبرهنة السابقة بالشكل :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وليكن M فضاء حلقي ما من R ، وإذا كانت

أسرة غير خالية من الفضاءات الجزئية من M ، عندئذٍ $\bigcap_{i=1}^n N_i$ فضاء

حلقي جزئي من M ، علماً أنه يرمز بـ $\bigcap_{i=1}^n N_i$ للمجموعة :

$$\{x \in M : x \in N_i ; i = 1, 2, \dots, n\}$$

نتيجة (3) :

يمكن البرهان بسهولة على ما يلي :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاء حلقي على R ، وإذا كانت

N_1, N_2, N_3 ثلاثة فضاءات حلقيّة جزئية من M ، بحيث أن $N_2 \subseteq N_1$ ، فإن :

$$N_1 \cap (N_2 + N_3) = N_2 + (N_1 \cap N_3)$$

المساواة السابقة تبين لنا ارتباط عمليتي الجمع والتقاطع السابقتين ببعضهما .

مثال (6) :

لتكن B, A مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من M, R على الترتيب ، حيث

$(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، M فضاء حلقي . وإذا كان :

$$AB = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i ; a_i \in A , x_i \in B , n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

وإذا كانت A مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن AB فضاء حلقي جزئي من

. M

الحل :

حسب تعريف المجموعة AB نجد أن $AB \subseteq M$ ، $\phi \neq$. ليكن y, x عنصرين ما من AB ، فإنه يمكن كتابتهما بالشكل : $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ ، $y = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j$ ، حيث أن a_i و b_j من A و x_i و y_j من B و m, n عدنان صحيحان موجبان ، وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} x - y &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i - \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^m (-b_j) \cdot y_j \in AB \end{aligned}$$

بفرض أن r عنصر ما من R و x عنصر ما من AB ، لأن العنصر x يكتب بالشكل : $x = \sum_{k=1}^s c_k \cdot x_k$ حيث أن c_k من A و x_k من B و s عدد صحيح موجب ، وبالتالي ، فإن :

$$a \cdot x = a \cdot \left(\sum_{k=1}^s c_k \cdot x_k \right) = \sum_{k=1}^s a \cdot (c_k \cdot x_k) = \sum_{k=1}^s (a \cdot c_k) \cdot x_k \in AB$$

نستنتج مما سبق أن AB فضاء حلقي جزئي من M .

(4-5) الفضاءات الحلقية المنتهية التوليد Finite generated modules :

ليكن M فضاءً حلقياً ما على حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من M ، نعلم أن تقاطع كل الفضاءات الحلقية الجزئية من M التي يحوي كل منها S هو فضاء حلقي جزئي من M يحوي S . نسمي هذا الفضاء الحلقي الجزئي من M بالفضاء الحلقي الجزئي المولد بالمجموعة S ، ونرمز له عادةً بـ $\langle S \rangle$.

بحالة خاصة ، إذا كانت المجموعة S منتهية ، أي أن $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ فإن $\langle S \rangle$ تكتب بالشكل :

$$\langle S \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

نستنتج من التعريف السابق ، أنه إذا كان M فضاءً حلقياً على حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من M ، فإن الفضاء الحلقى الجزئي من M ، المولد بالمجموعة S ، هو أصغر فضاء حلقى جزئي من M يحوي S .

مبرهنة (4) :

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الحلقى M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ولنرمز بـ F لمجموعة كل التراكيب الخطية من الشكل : $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j$ ، لكل a_i من R و x_i, y_j من S و b_j من Z و m, n عدنان صحيحان موجبان ، عندئذ F فضاء حلقى جزئي من M يحوي S ، وهو أصغر فضاء حلقى جزئي من M يحوي S .

ملاحظة (2) :

ليكن M فضاءً حلقياً ما على حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت $\phi \neq S \subseteq M$ ، إن الفضاء الحلقى الجزئي من M ، المولد بالمجموعة S يتألف من جميع التراكيب الخطية التي من الشكل : $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j$ ، حيث أن x_i, y_j من S و a_i من R و b_j من Z و m, n عدنان صحيحان موجبان .

وإذا كانت المجموعة S تتألف من عنصر واحد فقط ، وليكن x مثلاً ، فإن الفضاء الحلقى الجزئي من M ، المولد بالعنصر x يتألف من جميع العناصر التي هي من الشكل $ax + bx$ حيث a من R و n من Z .

تعريف (12) :

الفضاء الحلقى M على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ يسمى فضاءً حلقياً دائرياً إذا تحقق الشرط : $M = \langle m \rangle$ ، لكل m من M .

نتيجة (4) :

ليكن $(V, +, \cdot)$ فضاءً متجهياً على الحقل $(F, +, \cdot)$ ، إن الفضاء V يكون مولداً

بشكل نهائي كفضاء حلقي على الحقل F ، إذا ، فقط إذا ، كان V فضاء متجهي على F ذا بعد منته ، ويكون دائرياً ، إذا فقط إذا كان $\dim V = 0$ أو $\dim V = 1$.
مبرهنة (5) :

إذا كان M فضاءً حلقياً على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ مولداً بالمجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، فإن :

$$M = \sum_{i=1}^n R x_i = \{ r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n ; r_i \in R \}$$

البرهان :

ليكن x, y عنصرين من $\sum_{i=1}^n R x_i$ وإذا كان $r \in R$ ، فإن :

$$x - y \in \sum_{i=1}^n R x_i , r \cdot x \in \sum_{i=1}^n R x_i$$

أي أن $\sum_{i=1}^n R x_i$ يشكل فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

وبما أن $x_i \in \sum_{i=1}^n R x_i$ ، فإن $1 \cdot x_i = x_i \in R x_i \subseteq \sum_{i=1}^n R x_i$.

وبما أن $\sum_{i=1}^n R x_i$ أصغر فضاء حلقي من M ، يحوي كل عناصر x_i ، إذن

$$M = \sum_{i=1}^n R x_i$$

ملاحظة (3) :

إن مجموعة مولدات الفضاءات الحلقية ليس بالضرورة أن تكون وحيدة ، فمثلاً ، إذا كانت S مجموعة كل كثيرات الحدود بمتغير x مثلاً على حقل ما وليكن $(F, +, \cdot)$ درجتها أصغر أو تساوي n ، فإن S تشكل فضاء متجهات على الحقل F مجموعاتها المولدة هي :

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\} , \{1, 1+x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

نتيجة (5) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاء حلقي بمحايد أيضاً ، إن

الشرط اللازم والكافي لكي تكون المجموعة الجزئية $S \subseteq M$ مولدة لـ M هو أن يكون بالإمكان كتابة كل عنصر x من M بالشكل $\sum_{i=1}^n r_i \cdot x_i$ ، لكل x_i من S و r_i من R و n عدد صحيح موجب .

تعريف (13) الفضاء المتجهي الجزئي الرئيس :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاء حلقي على R وليكن x عنصراً ما من M ، فإن $R \cdot x$ هو فضاء حلقي جزئي من M ، يسمى فضاءً حلقياً جزئياً رئيساً مولداً بالعنصر x ، حيث أن :

$$R \cdot x = \{ r \cdot x : r \in R \}$$

ينتج من التعريف السابق ، أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وكان M فضاء حلقي بمحايد على R ، وإذا كان x عنصراً ما من M ، فإن $\langle x \rangle = R \cdot x$.

مثال (7) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما بمحايد ، ولتكن M_2 مجموعة المصفوفات المربعة الحقيقية ، ولنعرف على M_2 العمليتين الثنائيتين الداخلية والخارجية على الترتيب بالشكل التالي :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \text{ لكل } \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} \text{ من } M_2$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r x_1 & r y_1 \\ r z_1 & r t_1 \end{pmatrix} ; \forall r \in R$$

إن M_2 فضاء حلقي على R ، أثبت أن المجموعة

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

هي مجموعة مولدة لـ M_2 .

الحل :

ليكن $A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ عنصراً ما من M_2 ، يمكن كتابة المصفوفة A بالشكل :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_4 \end{pmatrix} \\ &= d_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مثال (8) :

لنعرف على المجموعة $R^2 = \{ (x_1, y_1) : x_1, y_1 \in R \}$ ، حيث $(R, +, \cdot)$ حلقة ما بمحايد ، العملية الثنائية الداخلية :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

لكل x_1, x_2, y_1, y_2 من R ، العملية الخارجية بالشكل :

$$r(x_1, y_1) = (r \cdot x_1, r \cdot y_1)$$

لكل r من R و x_1, y_1 من R .

من الواضح أن R^2 فضاء حلقي بمحايد على R .

أثبت أن المجموعة $S = \{ (1,0), (0,1) \}$ مولدة لـ R^2 . (إن 0 هو صفر الحلقة و 1 محايدها).

الحل :

إن المجموعة S مولدة لـ R^2 ، لأن إذا كان b, a عنصريين ما من R ، فإن :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

(5-5) المجموع المباشر للفضاءات الحلقية **Direct sum of modules**

لتكن $\{N_i\}_{i=1}^n$ أسرة من الفضاءات الحلقية الجزئية من الفضاء الحلقي M على

الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$. نقول عن الفضاء الحلقي M ، إنه مجموع مباشر داخلي

للفضاءات الحلقية الجزئية N_i ، حيث $1 \leq i \leq n$ إذا تحقق الشرطان :

$$M = \sum_{i=1}^n N_i \quad (1)$$

$$1 \leq i, j \leq n, N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\} \quad (2)$$

سنرمز للمجموع المباشر الداخلي بالشكل :

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n = \bigoplus_{i=1}^n N_i$$

المبرهنة التالية ، تبين لنا ، متى يكون فضاء حلقي M على حلقة ما ، مجموعاً مباشراً داخلياً للفضاءات الحلقية الجزئية ، والتي سنقبلها بدون برهان .

مبرهنة (6) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، إذا كان M فضاءً حلقياً على الحلقة R ، يكون M مجموعاً مباشراً داخلياً للفضاءات الحلقية الجزئية N_i حيث $1 \leq i \leq n$ ، وإذا ، فقط إذا ، أمكن كتابة أي عنصر وليكن m من M بشكل وحيد بالشكل :

$$m = \sum_{i=1}^n a_i ; a_i \in N_i$$

مبرهنة (7) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كانت N_i ، حيث $1 \leq i \leq n$ ، أسرة من الفضاءات الحلقية الجزئية للفضاء الحلقي M عندئذٍ العبارات التالية متكافئة :

$$i \in [1, t], N_i \text{ أسرة الفضاءات } M = \sum_{i=1}^t N_i \quad (1)$$

$$1 \leq i \leq t, n_i = 0, \text{ فإن } n_i \in N_i, \text{ حيث أن } \sum_{i=1}^t n_i = 0 \quad (2)$$

$$1 \leq i \leq t, N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\} \quad (3)$$

البرهان :

$$(1) \Rightarrow (2)$$

لنفرض أن $M = \sum_{i=1}^t N_i$ مجموعاً مباشراً داخلياً ، وحسب المبرهنة السابقة ،

أي عنصر من M وليكن m يكتب بصورة وحيدة ، ومن العلاقة

$$\sum_{i=1}^t n_i = 0 = \sum 0 \quad \text{نجد أن } n_i = 0 \text{ لكل } 1 \leq i \leq t .$$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

إذا كان $m \in N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j$ ، فإن $x = n_i = \sum_{i \neq j} n_j$ ، وبالتالي يكون

$$n_i - \sum_{i \neq j} n_j = 0 \text{ ، وحسب الفرض } n_i = 0 \text{ يكون } m = 0 \text{ ، وهذا يعني أن :}$$

$$N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$$

$$(3) \Rightarrow (1)$$

إذا كان $m = \sum_{i=1}^t n_i$ ، $m = \sum_{i=1}^t n'_i$ ، حيث $n_i, n'_i \in N_i$ ، لكل $1 \leq i \leq t$ ، وبالتالي نجد :

$$n_i - n'_i = \sum_{i \neq j} (n_j - n'_j) \in N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = \{0\}$$

وبالتالي فإن $n_i - n'_i = 0$ ، ويكون للعنصر m تمثيل وحيد ، ويكون $\sum_{i=1}^t N_i$ مجموعاً مباشراً داخلياً .

تعريف (14) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وبفرض أن N_i ، حيث $1 \leq i \leq r$ ، أسرة من الفضاءات الحلقية الجزئية من الفضاء الحلقى M على الحلقة R .

بأخذ الجداء الديكارتي $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$ ، وإذا كانت (n_1, n_2, \dots, n_r) مجموعة جميع المركبات من النوع r ، حيث $n_i \in N_i$ ، لكل $1 \leq i \leq r$.

لنعرف عملية الجمع بالشكل :

$$(n_1, n_2, \dots, n_r) + (m_1, m_2, \dots, m_r) = (n_1 + m_1, \dots, n_r + m_r)$$

وعملية الضرب القياسي بالشكل :

$$a(n_1, n_2, \dots, n_r) = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_r})$$

عندها نحصل على فضاء حلقي ، نسميه عادةً بالمجموع المباشر الخارجي للفضاءات الحلقية الجزئية N_i حيث $1 \leq i \leq r$. ونرمز لهذا المجموع بـ $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r$

مثال (9) :

ليكن $(R, +, \cdot)$ حقل الأعداد الحقيقية ، وإذا كان $R^3 = (V, +, \cdot)$ فضاء متجهات على الحقل R ، أثبت أن $V = R a_1 + R a_2 + R a_3$ وأن $V = \bigoplus_{i=1}^3 R a_i$ ، حيث أن :

$$a_1 = (1, 0, 0) , a_2 = (1, 1, 0) , a_3 = (1, 1, 1)$$

الحل :

بفرض أن المتجه (α, β, γ) من V ، عندها يكون :

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha - \beta) a_1 + (\beta - \gamma) a_2 + \gamma a_3$$

$$V = R a_1 + R a_2 + R a_3 \quad \text{ومنه يكون :}$$

$$. V = \bigoplus_{i=1}^3 R a_i \quad \text{لنثبت الآن أن}$$

ليكن $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0$ ، ومنه يكون :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 , \beta + \gamma = 0 , \gamma = 0$$

وبالتالي نحصل على ، $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ، إذن $R a_1 + R a_2 + R a_3$ هو مجموع

$$. V = \bigoplus_{i=1}^3 R a_i \quad \text{مباشر داخلي، أي}$$

(6-5) الفضاء الحلقى لخارج القسمة Quotient module :

ليكن M فضاءً حلقياً على حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان N فضاءً حلقياً جزئياً من M ، إن زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية (M, \star) (لأن N فضاء حلقي جزئي من M) . وبما أن أية زمرة جزئية من زمرة إبدالية هي زمرة

جزئية ناظرية منها ، فإن زمرة جزئية ناظرية من الزمرة $(M,+)$.
لنعرف على عناصر المجموعة M/N التالية :

$$M/N = \{ m + N : m \in M \}$$

عملية ثنائية داخلية $(+)$ بالشكل :

$$(m + N) + (m' + N) = (m + m') + N$$

لكل m, m' من M .

عندها تكون $(M/N,+)$ زمرة إبدالية ، وإذا عرفنا على M/N عملية خارجية ،
بالشكل :

$$r(m + N) = r.m + N$$

لكل r من R و m من M .

عندئذ تكون هذه العملية حسنة التعريف .

والمبرهنة التالية ، تثبت لنا أن M/N فضاء حلقي على الحلقة $(R,+,\cdot)$.
مبرهنة / تعريف (8) :

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كان N فضاءً
حلقياً من M ، إذا عرفنا على المجموعة M/N التالية :

$$M/N = \{ m + N : m \in M \}$$

عملية ثنائية داخلية $(+)$ بالشكل :

$$(m + N) + (m' + N) = (m + m') + N$$

لكل m, m' من M . وعملية خارجية (\cdot) بالشكل :

$$r.(m + N) = r.m + N$$

لكل r من R و m من M . عندئذ M/N فضاء حلقي على R بالنسبة للعملياتين
المعرفتين على المجموعة M/N .

نسمي M/N مع العمليتين الثنائيتين السابقتين ، بفضاء حلقي خارج القسمة لـ M
على N .

البرهان :

لنبرهن أولاً ، أن $(M/N, +)$ زمرة إبدالية .

أ- إن العملية $(+)$ تجميعية على عناصر M/N ، لأن :

لكل $m + N, m' + N, m'' + N$ من M/N ، فإن :

$$\begin{aligned} [(m + N) + (m' + N)] + (m'' + N) &= [(m + m') + N] + (m'' + N) \\ &= [(m + m' + m'')] + N = [m + (m' + m'')] + N \\ &= (m + N) + [(m' + m'') + N] = (m + N) + [(m' + N) + (m'' + N)] \end{aligned}$$

ب- العنصر المحايد في M/N هو $O + N = N$ لأنه :

$$\begin{aligned} (m + N) + (O + N) &= (m + O) + N = m + N = (O + m) + N \\ &= (O + N) + (m + N) \end{aligned}$$

لكل $m + N$ من M/N .

ج- يوجد لكل عنصر $m + N$ من M/N معكوس وهو $(-m) + N$ لأن :

$$\begin{aligned} (m + N) + [(-m) + N] &= [m + (-m)] + N = O + N \\ &= [(-m) + m] + N = [(-m) + N] + (m + N) \end{aligned}$$

د- إن العملية $(+)$ إبدالية ، لأنه لكل $m + N, m' + N \in M/N$ ، يكون :

$$\begin{aligned} (m + N) + (m' + N) &= (m + m') + N = (m' + m) + N \\ &= (m' + N) + (m + N) \end{aligned}$$

لنثبت الآن أن العملية الخارجية حسنة التعريف .

ليكن r عنصراً ما من R ، وليكن m, m' عنصرين ما من M ، بحيث يكون :

$m + N = m' + N$ ، وبالتالي فإن $m - m' \in N$ ، أي أن $(m - m') \in N$ ، r ،

وبالتالي يكون : $r.m - r.m' \in N$

$$r.m + N = r.m' + N \quad \text{إذاً :}$$

لنبرهن الآن أن :

$$1) r [(m + N) + (m' + N)] = r (m + N) + r (m' + N)$$

$$2) (r + s) (m + N) = r (m + N) + s (m + N)$$

$$3) (r.s) (m + N) = r (s (m + N))$$

لكل s, r من R و m, m' من M .

$$\begin{aligned} 1) r [(m + N) + (m' + N)] &= r [(m + m') + N] = r (m + m') + N \\ &= (r.m + r.m') + N = (r.m + N) + (r.m' + N) \\ &= r (m + N) + r (m' + N) \end{aligned}$$

وذلك لكل r من R و m, m' من M .

$$\begin{aligned} 2) (r + s) (m + N) &= (r + s) m + N = (r.m + s.m) + N \\ &= (r.m + N) + (s.m + N) = r (m + N) + s (m + N) \end{aligned}$$

لكل s, r من R و m من M .

$$\begin{aligned} 3) (r.s) (m + N) &= (r.s) m + N = r.(s.m) + N = r (s.m + N) \\ &= r [s (m + N)] \end{aligned}$$

لكل s, r من R و m من M .

نستنتج مما سبق أن M/N فضاء حلقى على M بالنسبة للعمليات المعرفتين على M/N .

ملاحظة (4):

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً بمحايد على R ،
وإذا كان N فضاء حلقى جزئي من M ، عندئذ يكون M/N فضاء حلقى خارج
القسمة بمحايد ، لأنه :

$$1. (m + N) = 1.x + N = x + N$$

حيث 1 هو العنصر المحايد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولكل x من M .

(7-5) تشاكل الفضاءات الحلقية Homomorphism of modules :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M و M_1 فضاءين حلقيين على R . نقول

عن التطبيق :

$\varphi: M \longrightarrow M_1$ إنه تشاكل للفضاء الحلقي M في الفضاء الحلقي M_1 ، إذا تحققت الشروط التالية :

$$(1) \text{ لكل } y, x \text{ من } M \text{ ، إن } : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$(2) \text{ لكل } x \text{ من } N \text{ و } r \text{ من } R \text{ ، فإن } : \varphi(r \cdot x) = r \cdot \varphi(x)$$

ويمكن أن نعرف التشاكل السابق بالشكل التالي :

يكون التطبيق $\varphi: M \longrightarrow N$ تشاكلاً بين فضاءين حلقيين على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا ، و فقط إذا ، تحقق الشرط :

لكل m, m' من M و s, r من R :

$$\varphi(r \cdot m + s \cdot m') = r \varphi(m) + s \varphi(m')$$

يمكننا تعريف التشاكل الأحادي ، والتشاكل الشامل ، والتماثل لفضاءين حلقيين ، كما عرفنا تماماً في نظرية الزمر والحلقات ، فمثلاً ، يكون التطبيق $\varphi: M \longrightarrow N$ تماثلاً بين الفضاءين الحلقيين N, M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا كان φ تشاكلاً وتقابلاً ، أي أن φ متباين وشامل . ويحقق الشرطين الواردين في تعريف التشاكل السابق .

ملاحظات :

(1) لا يمكن تعريف التشاكل لفضاءين حلقيين على حلقتين مختلفتين ، أي يجب أن يكون الفضاءان N, M معرفين على الحلقة $(R, +, \cdot)$ نفسها .

(2) إذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ تشكل حقلاً F أو حلقة القسمة ، عندها يسمى التشاكل بين الفضاءين الحلقيين N, M على الحقل F تحويلاً خطياً من فضاء متجهي M إلى فضاء متجهي N

(3) يرمز عادةً لمجموعة كل التشاكلات من M إلى N بـ $\text{Hom}(M, N)$. وفي حالة خاصة ، إذا كان $M = N$ نسمي عادةً بالتشاكل الداخلي ونرمز له بـ $\text{End}_R(M)$.

وإذا كان φ تماثلاً بين الفضاءين الحلقيين N, M ، وإذا فرضنا أن $M = N$ ، فإن التماثل السابق يسمى بتماثل داخلي $\text{Aut}_R(M)$.

(4) نرمز عادةً للتماثل بين فضاءين حلقيين بـ \cong .

تعريف النواة وصورة الفضاء الحلقى **Kern , Image module** :

ليكن M', M فضاءين حلقيين على حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ولنرمز بـ O' لصفر الفضاء الحلقى M' ، وإذا كان φ تشاكلاً للفضاء الحلقى M في الفضاء الحلقى M' ، فإن المجموعة :

$$\{ x \in M : \varphi(x) = O' \}$$

تسمى نواة φ ، ويرمز لها عادةً بـ $\text{Ker } \varphi$. ونسمي المجموعة $\{ \varphi(m) ; m \in M \}$ بصورة الفضاء الحلقى M ويرمز لها بـ $\text{Im } \varphi$. إذن :

$$\text{Ker } \varphi = \{ x \in M : \varphi(x) = O' \}$$

$$\text{Im } \varphi = \{ \varphi(m) ; m \in M \}$$

حيث O' صفر الفضاء الحلقى M' .

مبرهنة (9) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وليكن M, M' فضاءين حلقيين على R ، ولنرمز بـ O و O' لصفري الفضاءين الحلقيين M, M' على الترتيب إذا كان φ تشاكلاً للفضاء الحلقى M في الفضاء الحلقى M' ، فإن :

$$\varphi(O) = O' \quad (1)$$

$$\varphi(-m) = -\varphi(m) \quad (2) \text{ لكل } m \text{ من } M$$

$$\varphi(m - n) = \varphi(m) - \varphi(n) \quad (3) \text{ لكل } m, n \text{ من } M$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \varphi(m_i) \quad (4) \text{ لكل } r_i \text{ من } R \text{ و } m_i \text{ من } M \text{ و } n \in \mathbb{Z}^+$$

تبرهن بالطريقة نفسها التي برهنت في الحلقات .

مبرهنة (10) :

إذا كان M و M' فضاءين حقيقيين على حلقة ما، وليكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان $\varphi: M \rightarrow M'$ تشاكلاً بين الفضاءين الحقيقيين M, M' ، عندها :

$$(1) \text{Ker } \varphi \text{ تشكل فضاءً حقيقياً جزئياً من } M$$

$$(2) \text{Im } \varphi \text{ تشكل فضاءً حقيقياً جزئياً من } N$$

البرهان :

إن $\phi \neq \text{Ker } \varphi$ ، لأنه $\varphi(O) = O'$ (حسب المبرهنة السابقة)، وبالتالي فإن $O \in \text{Ker } \varphi$. لنبرهن الآن أن : $m - m' \in \text{Ker } \varphi$ ، لكل $m, m' \in \text{Ker } \varphi$.

$$\begin{aligned} \varphi(m - m') &= \varphi[m + (-m')] = \varphi(m) + \varphi(-m') \\ &= \varphi(m) - \varphi(m') = o - o = o \end{aligned}$$

إذن $m - m' \in \text{Ker } \varphi$.

لنبرهن أخيراً أنه إذا كان r من R و m من $\text{Ker } \varphi$ ، فإن $r.m \in \text{Ker } \varphi$.

$$\text{بما أن } \varphi(r.m) = r.\varphi(m) = r.o = o \text{، فإن : } r.m \in \text{Ker } \varphi$$

نستنتج مما سبق، أن : $\text{Ker } \varphi$ فضاء حقيقي جزئي على الحلقة $(R, +, \cdot)$ من الفضاء الحقيقي M .

(2) إن $\phi \neq \text{Im } \varphi$ ، لأن $\varphi(o) = o'$ ، وهذا يعني، حسب تعريف $\text{Im } \varphi$ أن

$$o' \in \text{Im } \varphi$$

إذا كان $n, n' \in \text{Im } \varphi$ ، فإنه يوجد $m, m' \in M$ ، بحيث يكون :

$$\varphi(m) = n, \varphi(m') = n'$$

ومنه يكون :

$$\begin{aligned} n - n' &= \varphi(m) - \varphi(m') = \varphi(m) + \varphi(-m') \\ &= \varphi[m + (-m')] = \varphi(m - m') \end{aligned}$$

أي أن $n - n' \in \text{Im } \varphi$.

وإذا كان r من R و n من $\text{Im } \varphi$ ، فإن :

$$r.n = r.\varphi(m) = \varphi(r.m)$$

أي أن $r.m \in \text{Im } \varphi$ ، حيث m من M .

نستنتج مما سبق ، أن $\text{Im } \varphi$ فضاءً حلقياً جزئياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، من الفضاء الحلقي N .

مبرهنة (11) :

الشرط اللازم والكافي، لكي يكون التشاكل $\varphi : M \longrightarrow N$ أحادياً هو أن يكون $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ، حيث N, M فضاءين حلقيين على حلقة ما ولتكن $(R, +, \cdot)$.
و 0 هو صفر الفضاء الحلقي M .

البرهان :

لنفرض أولاً أن التشاكل φ أحادياً ، ولنبرهن أن $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

ليكن $m \in \text{Ker } \varphi$ ، وهذا يعني أن $\varphi(m) = \varphi(0) = 0'$ ، وبما أن التطبيق φ أحادي ، فإن $m \in \text{Ker } \varphi$ لكل $m = 0$ ، وهذا يعني أن $\text{Ker } \varphi \subseteq \{0\}$ ، وبما أن $\{0\} \subseteq \text{Ker } \varphi$ ، إذن $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

لنبرهن الآن أن φ أحادي ، علماً أن $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ، ليكن $\varphi(m) = \varphi(m')$ ، لكل m, m' من M ، وبالتالي يكون: $\varphi(m) - \varphi(m') = 0'$ أو $\varphi(m - m') = 0'$ ، وبالتالي يكون وهذا يعني أن $m - m' \in \text{Ker } \varphi = \{0\}$ ، إذن $m - m' = 0$ ، وبالتالي يكون لدينا $m = m'$. إذن التشاكل φ أحادي .

(8-5) أمثلة :

مثال (10) :

إذا كان M فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، يمكن التحقق بسهولة أن التطبيق $I: M \longrightarrow M$ المعرف بـ $I(m) = m$ ، لكل m من M هو تشاكل على الفضاء الحلقي M . (يسمى عادةً هذا التشاكل بالتشاكل الذاتي المطابق على M) .
كما أن التطبيق $O: M \longrightarrow M$ المعرف بـ $O(m) = 0$ حيث $m \in M$ تشاكل

على الفضاء الحلقي M ، O هو صفر هذا الفضاء . (يسمى عادةً هذا التشاكل بالتشاكل الذاتي الصفري) .

مثال (11) :

إذا كان M فضاءً حلقياً على الحلقة الإبدالية $(R, +, \cdot)$ ، أثبت أن التطبيق $\varphi : M \rightarrow M$ المعرفة بالشكل $\varphi(m) = 7m$ لكل m من M هو تشاكل ذاتي على M .

الحل :

لكل m, m' من M يكون :

$$\varphi(m + m') = 7(m + m') = 7m + 7m'$$

$$= \varphi(m) + \varphi(m')$$

وكذلك نجد أن : $\varphi(7m) = 7\varphi(m)$ لكل m من M .

مثال (12) :

ليكن M فضاءً حلقياً على حلقة ما $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان L, N فضاءان حلقيان جزئيان من M بحيث إن $M = L \oplus N$ أثبت أن $N \cong M/L$.

الحل :

لنعرف التطبيق $\varphi : N \rightarrow M/L$ بالشكل $\varphi(m) = m + L$ ، لكل m من N . ولنبرهن أولاً أن φ تشاكل لـ N على M/L .

ليكن m, m' عنصرين ما من N ، وإذا كان r من R ، فإن :

$$\varphi(m + m') = (m + m') + L = (m + L) + (m' + L)$$

$$= \varphi(m) + \varphi(m')$$

$$\varphi(r.m) = r.m + L = r(m + L) = r\varphi(m)$$

إذن φ تشاكل ، لنبرهن أن φ تقابلاً (متباين وشامل) .

ليكن m, m' عنصرين ما من N بحيث يكون : $\varphi(m) = \varphi(m')$. بما أن m, m'

من N (فضاء حلقى جزئى) فإن $m - m' \in N$ وبما أن $\varphi(m) = \varphi(m')$ فإن
 $m + L = m' + L$ وهذا يعنى أن $m - m' \in L$.

نستنتج من : $m - m' \in N$ و $m - m' \in L$ أن $m - m' \in L \cap N$.

وبما أن $M = L \oplus N$ ، فإن : $L \cap N = \{0\}$ حيث 0 هو صفر الفضاء الحلقى M . إذن $m - m' = 0$ ، وبالتالي يكون $m = m'$.

لنبرهن أخيراً أن φ شامل .

ليكن u عنصراً ما من M ، فإنه يمكن كتابته بالشكل : $u = u_1 + u_2$ حيث $u_1 \in L$ ، $u_2 \in N$ ، وبالتالي يكون :

$$\varphi(u) = u_2 + L = (u_1 + L) + (u_2 + L) = (u_1 + u_2) + L = u + L$$

نستنتج مما سبق أن φ تماثل لـ N على M/L ، أي أن $N \cong M/L$.

مبرهنة (12) تطبيق الغمر القانوني :

ليكن N فضاءً حلقياً جزئياً من الفضاء الحلقى M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ التطبيق $\varphi : M \rightarrow M/N$ ، المعرف بالشكل : $\varphi(m) = m + N$ لكل m من M تشاكلاً شاملاً . نسمي عادةً هذا التشاكل بتطبيق الغمر القانوني .

البرهان :

لكل $m, m' \in M$ ، يكون :

$$\begin{aligned} \varphi(m + m') &= (m + m') + N = (m + N) + (m' + N) \\ &= \varphi(m) + \varphi(m') \end{aligned}$$

وإذا كان r من R و m من M ، فإن :

$$\varphi(r.m) = (r.m) + N = r.(m + N) = r.\varphi(m)$$

وبسهولة نرى أن التطبيق φ شامل ، ويتضح هذا من التعريف مباشرة .

إذن $M \cong M/N$.

(9-5) المبرهنات الأساسية للتشاكل في الفضاءات الحلقية :

تبرهن المبرهنات الأساسية للتشاكل في الفضاءات الحلقية على حلقة ما ، بنفس

الطريقة التي تمّ برهانها في النظريات للتشاكل في الزمر والحلقات ، لذا لا داعي لبرهانها مرة أخرى .

مبرهنة (13) مبرهنة التماثل الأولى (First isomorphism's theorem) :

بفرض أن التطبيق $\varphi : M \longrightarrow N$ تشاكلاً بين الفضاءين الحلقيين N, M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذ يكون :

$$M/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$$

مبرهنة (14) مبرهنة التماثل الثانية (2nd Isomorphism's theorem) :

إذا كان L, N فضاءين حلقيين جزئيين من الفضاء الحلقي M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذ :

$$(N + L)/N \cong L/(N \cap L)$$

مبرهنة (15) المبرهنة الثالثة للتماثلات (3rd Isomorphism's theorem) :

إذا كان L, N فضاءين حلقيين جزئيين من الفضاء الحلقي M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، حيث $L \subseteq N$ ، فإن :

$$M/N \cong M/L / N/L$$

نتيجة (6) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كانت I مثالية يسارية في R ، يكون الفضاء M دائرياً إذا ، و فقط إذا ، كان $M \cong R/I$.
البرهان :

لتكن $I = \{r \in R : r.x = 0\}$ مثالية يسارية في R . وليكن $M \cong R.x$ فضاءً حلقياً دائرياً مولداً بالعنصر x . لنعرّف التطبيق $\varphi : R \longrightarrow R.x$ بالشكل :

$$\varphi(r) = r.x \text{ لكل } r \text{ من } R .$$

لنبرهن الآن أن φ تشاكل :

$$\varphi(r + s) = (r + s).x = r.x + s.x$$

$$\varphi(s.r) = (s.r).x = s.(r.x) = s.\varphi(r)$$

لكل $r, s, x \in R$.

كما أن φ شامل لأنه ، لكل $r, x \in R$ ، عندها يوجد $r \in R$ ، حيث أن

$$\varphi(r) = r.x$$

كما أن نواة التطبيق φ هي :

$$\text{Ker } \varphi = \{r \in R : r.x = 0\} = I$$

باستخدام المبرهنة الأولى للتماثلات نجد : $R/I \cong R.x$

لمبرهن العكس :

أي لنبرهن أن R/I دائري .

الفضاء الحلقي R/I على الحلقة بمحايد R مولد بالعنصر $1 + I \in R/I$ ، وبالتالي ،

يكون : $R(1 + I) = R/I$ ، أي أن ، R/I دائري .

(10-5) الفضاءات الحلقية الحرة :

بداية نعرف الارتباط والاستقلال الخطيان .

تعريف (15) الاستقلال الخطي (Linearly independent) :

ليكن M فضاء حلقي على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$. نقول عن المجموعة

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ غير الخالية من الفضاء الحلقي M إنها مستقلة خطياً ، إذا

وُجِدَتْ عناصر من R ولتكن r_i بحيث يتحقق ما يلي :

$$\text{إذا كان } \sum_{i=1}^n r_i \cdot a_i = 0 \text{ ، فإن } r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0 .$$

غير ذلك ، نقول عن المجموعة A إنها مرتبطة خطياً (Linearly dependnt)

أي إذا وُجِدَتْ عناصر r_i من R ، ليست جميعها أصفاراً ، بحيث يكون

$$\sum_{i=1}^n r_i \cdot a_i = 0$$

كما في الفضاءات المتجهية على حقل ، المجموعة غير المنتهية لعناصر من

الفضاء الحلقي M على الحلقة R تكون مستقلة خطياً ، إذا كانت كل مجموعة

جزئية منتهية منها مستقلة خطياً ، غير ذلك تكون المجموعة غير المنتهية مرتبطة خطياً .

نتيجة (7) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وبفرض أن $\{x_i\}$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ (عدد صحيح موجب) أسرة عناصر من M . وإذا كانت $\{x_i\}$ مستقلة خطياً على R ، وإذا كان $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i$ ، لكل a_i, b_i من R فإن $a_i = b_i$ من أجل $i = 1, 2, \dots, n$.

البرهان :

لنرمز بـ o' لصفء الفضاء الحلقى M على R ، ولصفء الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ o عندها يكون :

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \cdot x_i = o' \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i$$

$$a_i - b_i = o \Rightarrow a_i = b_i ; i = 1, 2, \dots, n$$

وبالتالي :

مثال (13) :

بفرض أن $M = R^n$ فضاءً حلقياً على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$. يمكن التحقق بسهولة أن المجموعة :

$$S = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

مستقلة خطياً في M . المجموعة S السابقة من الفضاء R^n تسمى قاعدة (أساساً) معيارياً لـ R^n .

تعريف (16) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وبفرض أن $\{x_i\}$ أسرة عناصر من M حيث $i = 1, 2, \dots, n$. نقول إن $\{x_i\}$ تشكل قاعدة لـ M على R إذا تحقق :

$$M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$(2) \text{ المجموعة } \{x_i\} \text{ حيث } i = 1, 2, \dots, n \text{ مستقلة خطياً على } R .$$

تعريف (17) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً بمحايد على R ، وإذا كانت N مجموعة جزئية غير خالية من M ، فإننا نقول عن N إنها قاعدة (أساس) لـ M على R إذا تحقق ما يلي :

$$(1) \quad M = \langle N \rangle \text{ أي أن الفضاء الحلقي } M \text{ يولد بالمجموعة } N .$$

$$(2) \quad \text{المجموعة } N \text{ مستقلة خطياً على } R .$$

تعريف (18) الفضاء الحلقي الحر Free module :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً بمحايد على R ، نقول عن M إنه فضاء حر ، إذا كان لـ M قاعدة على R أو إذا كان M هو الفضاء الحلقي الصفري .

ملاحظة (5) :

ليس ضرورياً أن يكون لكل فضاء حلقي M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ أساساً فمثلاً ، إذا كانت (G, \star) زمرة دائرية (يمكن اعتبارها فضاء حلقي G على الحلقة $(Z, +, \cdot)$) . إن الزمرة G تملك أساساً إذا ، فقط إذا ، كانت G غير منتهية . (يمكن التأكد من ذلك بطريقة نقض الفرض).

مثال (14) :

كل فضاء متجهي V على حقل F يشكل فضاءً حلقياً حراً لأنه يملك قاعدة .

مبرهنة (16) :

لتكن $N = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة للفضاء الحلقي الحر M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ : $M \cong R^n$

البرهان :

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i' \cdot t_i \quad : \quad \varphi: M \longrightarrow R^n \text{ بالشكل}$$

حيث أن $t_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

بما أن $\sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n a'_i \cdot t_i$ ، حسب الاستقلال الخطي يكون $a_i = a'_i$ لكل i ، وهذا يعني أن φ حسن التعريف .

ليكن $m, m' \in M$ ، فإن $m = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$ ، $m' = \sum_{i=1}^n a'_i \cdot e_i$ ، لكل $a_i, a'_i \in R$.
إن التطبيق φ تشاكل لأنه يحقق :

$$\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$$

$$\varphi(r \cdot m) = r \cdot \varphi(m)$$

لنبرهن أن φ متباين .

إذا كان $\varphi(m) = 0$ ، فهذا يعني أن $\sum_{i=1}^n a_i \cdot t_i = 0$ وبذلك يكون $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ ، أي أن $a_i = 0$ وهذا يعني أن φ متباين . وحسب تعريف التطبيق φ نجد أيضاً أن φ شامل .

نستنتج مما سبق أن تماثل بين M و R^n .

ملاحظة (5) :

إذا كان V فضاءً متجهياً على الحقل F ، وإذا كانت $N = \{n_1, n_2, \dots, n_t\}$ مجموعة جزئية في V مرتبطة خطياً ، فإن أي عنصر من عناصر المجموعة N ، يكتب على شكل تركيب خطي لعناصر من N ، لكن الأمر يختلف في الفضاءات الحلقية .

المبرهنة التالية تبين وجود فضاء حلقي حر بدلالة التشاكل الحلقي للفضاءين الحلقيين M, M' .

مبرهنة (17) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقةً بمحايد ، وإذا كان M, M' فضاءين حلقيين بمحايدتين على R ، وإذا كان n عدداً صحيحاً موجباً ، ولتكن $\{x'_i\}_{i=1}^n$ أسرة عناصر من M' ، بحيث تكون $\{x'_i\}_{i=1}^n$ تشكل قاعدة لـ M' على R ، وإذا كان φ تشاكلاً للفضاء

الحلقي M على الفضاء الحلقي M' ، عندئذ يوجد فضاء حلقي حر وليكن F من M ويكون من أجله : $M = F \oplus \text{Ker } \varphi$

البرهان :

بما أن التطبيق φ هو تشاكل ، للفضاء الحلقي M على الفضاء الحلقي M' ، فهذا يعني ، أن التطبيق $\varphi: M \rightarrow M'$ شامل ، وبالتالي توجد عناصر وليتكن x_1, x_2, \dots, x_n من M بحيث يكون $\varphi(x_i) = x'_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

إن أسرة العناصر $\{x_i\}$ حيث $i=1, 2, \dots, n$ مستقلة خطياً على R ، لأنه إذا فرضنا أن a_i من R حيث $i=1, 2, \dots, n$ وبحيث يكون $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = 0$ حيث 0 هو

صفر الفضاء الحلقي M ، فإن $\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i\right) = 0'$ حيث $0'$ هو صفر الفضاء

الحلقي M' ، وبالتالي يكون : $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = 0'$ أي أن $a_i = 0$ من أجل

$i = 1, 2, \dots, n$ ، حيث 0 هو صفر الحلقة R .

لنفرض الآن F هو الفضاء الحلقي الجزئي من M المولد بالمجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أي أن :

$F = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، وبما أن $\{x_i\}_{i=1}^n$ مستقلة خطياً على R ، فإن $\{x_i\}_{i=1}^n$

تشكل قاعدة لـ F على R . أي أن F هو فضاء حلقي جزئي حر من M .

ليكن x عنصراً ما من M ، وبالتالي يكون $\varphi(x) \in M'$ وهذا يعني أنه بالإمكان

كتابة $\varphi(x)$ بالشكل : $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x'_i$ لكل b_i من R . وبالتالي يكون لدينا :

$$\varphi(x) - \sum_{i=1}^n b_i \cdot x'_i = 0'$$

$$\varphi(x) - \varphi\left(\sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i\right) = 0'$$

$$\varphi\left(x - \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i\right) = 0'$$

وهذا يعني ، أن $x = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i \in \text{Ker } \varphi$ ، أي أن $M = F + \text{Ker } \varphi$

ليكن y عنصراً ما من $F \cap \text{Ker } \varphi$ ، وبالتالي، يمكن كتابة العنصر y بالشكل :

$$y = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \text{ لكل } c_i \text{ من } R .$$

من ناحية ثانية ، لدينا $\varphi(y) = o'$ ، إذن يكون لدينا : $\varphi\left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i\right) = o'$ ، أي

أن $\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i = o'$ ، وهذا يعني أن $c_i = o''$ ، حيث أن $i = 1, 2, \dots, n$. إذن $y = 0$.

نستنتج، مما سبق، أنه يوجد فضاء حلقي جزئي حر F من M يكون من أجله

$$M = F \oplus \text{Ker } \varphi$$

(11-5) الفضاء الحلقي البسيط Simple module :

نقول عن الفضاء الحلقي M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد إنه بسيط أو (غير

قابل للتحليل) إذا تحقق ما يلي :

(1) (o) و M هما الفضاءان الحلقيان الجزئيان للفضاء الحلقي M على R فقط.

(2) $R.M \neq (o)$ حيث أن :

$$RM = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot m_i ; a_i \in R, m_i \in M \right\}$$

نلاحظ من التعريف السابق ، أن كل حقل يشكل فضاءً حلقياً بسيطاً .

مبرهنة (18) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، عندها الشروط

التالية متكافئة :

(1) M فضاء حلقي بسيط على R .

(2) $M \neq (o)$ و M مولد بأي عنصر $m \in M$ حيث $m \neq o$.

(3) $M \cong R/I$ ، حيث أن I مثالية أعظمية يسارية للحلقة R .

البرهان :

(1) \Rightarrow (2)

ليكن $m \in M$ ، بحيث $m \neq 0$ ، وبالتالي فإن $\langle m \rangle = RM$ يشكل فضاءً حلقياً جزئياً من M ، مولداً بالعنصر m ، أي أن $M = \langle m \rangle$.

(2) \Rightarrow (1)

إذا كان $N \neq 0$ فضاءً حلقياً جزئياً من M على R ، وإذا كان $n \in N$ حيث $n \neq 0$ ، فإنه يكون : $M = \langle n \rangle \subseteq N$ ، أي أن $M = N$ ، وهذا يعني أن M فضاء حلقى بسيط .

(1) \Rightarrow (3)

لدينا $RM = M \neq (0)$ ، وهذا يعني أنه يوجد $m \in M$ ، $m \neq 0$ وبحيث $Rm \neq 0$ ، بما أن Rm فضاء حلقى جزئى من M على R ، و M فضاء حلقى بسيط إذن $R.m = M$.

لنعرف التطبيق $\varphi : R \longrightarrow Rm$ بالشكل $\varphi(r) = r.m$ لكل r من R ، ويمكن التأكد من أن φ تشاكل شامل . ليكن $I = \text{Ker } \varphi$ ، حسب المبرهنة الأساسية الأولى للتماثلات نجد ، أن $R/I \cong R.m$ ، وبما أن R/I بسيط ، فإن المثالية الوحيدة اليسارية التي تحوي I هي الحلقة فقط . وهذا يعني أن I مثالية أعظمية يسارية للحلقة R .

(3) \Rightarrow (1)

ينتج مباشرة من الحقيقة التالية : إذا كان N فضاءً حلقياً جزئياً من الفضاء الحلقى M على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ يوجد تقابل يحافظ على الاحتواء بين مجموعة الفضاءات الحلقية الجزئية من M/N ، وبين مجموعة الفضاءات الحلقية الجزئية L من M حيث $N \subseteq L \subseteq M$.

تعريف (19) الفضاء الحلقى القابل للتحليل تماماً Completely reducible :

نقول عن الفضاء الحلقى M على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ ، إنه قابل للتحليل

تماماً ، إذا كان $M = \sum N_i$ ، حيث أن N_i فضاءات حلقية جزئية بسيطة من M على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

تعريف (20) عنصر الفتل (Torsion element) :

التطبيق $\varphi : R \longrightarrow Rm$ المعرف بالشكل $\varphi(r) = r.m$ حيث r من R و m من M (فضاء حلقى على الحلقة بمحايد R) ، يشكل تشاكل للفضاءات الحلقية R و M ، إن نواته هي :

$$\text{Ker } \varphi = \{r \in R : r.m = 0\}$$

تشكل مثالية يسارية في الحلقة R ، تسمى هذه المثالية بمثالية الترتيب للعنصر m ويرمز لها بـ $O(m)$ ، وبالتالي يكون :

$$Rm \cong R/O(m)$$

الآن ، نسمي العنصر $m \in M$ بعنصر فتل إذا وُجدَ عنصر لا يساوي الصفر ، وليكن r من R بحيث $r.m = 0$.

إن الشرط اللازم والكافي ، لكي يكون m عنصر فتل من الفضاء الحلقى M ، هو أن تكون مثالية الترتيب لذلك العنصر لا تساوي الصفر .

نسمي عادةً الفضاء الحلقى على الحلقة بمحايد R فضاءً حلقياً عديم الفتل إذا لم يحوِ على عناصر فتل غير معدومة .

تعريف (21) رتبة فضاء حلقى Rank of module :

إذا كان M فضاءً حلقياً على الحلقة الإبدالية $(R, +, \cdot)$ وبأساس (قاعدة) منتهية ، فإن رتبة الفضاء الحلقى M هي عدد عناصر أي أساس لهذا الفضاء .

لاحظ أنه إذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي حقل (في التعريف السابق) ، فإن رتبة الفضاء الحلقى M ، هي بعد ذلك الفضاء ويرمز له بالرمز $\dim_R M$.

تعريف (22) المتهمات للفضاءات الحلقية الجزئية :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً ما على R ، وإذا كان N فضاءً حلقياً جزئياً من M ، فإن متمم الفضاء الحلقى الجزئي N في M هو مودول

جزئي من M ، وليكن F بحيث يكون :

$$N \oplus F = M$$

يتضح من التعريف السابق ، أن كلاً من الفضاءين الحلقين الجزئيين $\{0\}$ و M هو متمم للآخر في M .

مثال (15) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاء حلقي على R ، ولنفرض أن M_1 و M_2 و N فضاءات حلقية جزئية من M ، بحيث يكون $M_1 \subseteq M_2$ ، ولنفرض أيضاً أن كلاً من M_1 و M_2 ، هو متمم لـ N في M ، أثبت أن $M_1 = M_2$.

الحل :

بما أن كلاً من الفضاءين الحلقين الجزئيين M_1 و M_2 هو متمم للفضاء الحلقى الجزئي N في M ، فإن :

$$M = N \oplus M_1 = N \oplus M_2$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$M = N + M_1 = N + M_2$$

$$N \cap M_1 = N \cap M_2 = \{0\}$$

و

حيث 0 هو صفر الفضاء الحلقى M ، وبالتالي يكون :

$$M_2 = M_2 \cap M = M_2 \cap (N + M_1) = M_1 + (N \cap M_2)$$

$$= M_1 \cap \{0\} = M_1$$

الفصل السادس

تمديد الحقول

Fields Extension

الفصل السادس

تمديد الحقول

Fields Extension

ندرس في هذا الفصل ، كيفية بناء حقل مبني على حقل جزئي منه ، وبالتالي سنتعرف على تركيب جبري لحقل ، اعتماداً على حقل جزئي منه .

إن نظرية امتداد الحقول تشكل أساساً لنظرية جالوا Galois theory من أجل إيجاد أصفار لكثيرات الحدود على حقل ما .

وسندرس في هذا الفصل أيضاً موضوع حقول الانشطار والتي هي جزء من نظرية امتداد الحقول. ونصح الطالب الكريم أن يقرأ في البداية الفضاءات المتجهة بشكل جيد .

(1-6) تعاريف :

1- تمديد الحقول Field extension :

إذا كان $E \supseteq F$ حلقتين ، حيث أن F حلقة جزئية لـ E ، نسمي F بحقل جزئي من E و E يسمى امتداداً extension للحقل F .

إذا كان E امتداداً للحقل F ، فإن الحقل E يشكل فضاء متجهي على الحقل F .

2- درجة امتداد Degree of extension :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، نسمي بُعد الفضاء E على F بدرجة امتداد E على F ، ونرمز لذلك بـ $[E : F]$.

إذا كان $[E : F] = n$ ، عندها نقول إن الامتداد منته ، ونكتب في هذه الحالة : $\dim_F E = [E:F]$ ، غير ذلك نقول إن الامتداد غير منته (Infinite extension).

3- العنصر الجبري Algebraic element :

نقول عن العنصر $u \in E$ حيث أن الحقل E امتداداً للحقل F ، إنه جبري على

الحقل F ، إذا وجدت كثيرة حدود غير صفرية ، ولنكن $f(x) \in F[x]$ بحيث يكون
 u جذراً لها على الحقل F ، أي إذا تحقق $f(u) = 0$.

إذا لم يكن بالإمكان إيجاد مثل هذا العنصر u في الحقل E ، فإننا نقول إن العنصر
 u غير جبري أو متسام (Transcendental) على الحقل F .

ينتج من التعريف السابق ، أن أي عنصر u في الحقل F يكون جبرياً على الحقل
 F ، لأنه جذر لكثيرة الحدود $x - u$.

4- الامتداد الجبري Algebraic extension :

نقول عن الامتداد E على الحقل F ، إنه امتداد جبري ، إذا كان كل عنصر من
 E جبري على الحقل F . غير ذلك ، نسمي امتداد E للحقل F امتداداً غير جبرياً
 أو امتداداً متسامياً على الحقل F .
 لنقدم الآن أمثلة حول التعاريف السابقة .

(2-6) أمثلة :

مثال (1) :

إن $C \supseteq R$ هو امتداد منتهي و $[C : R] = 2$ ، لأن المجموعة $\{1, i\}$ تشكل
 قاعدة لـ R بالنسبة للحقل المركب C .

إن حقل الأعداد الحقيقية $(R, +, \cdot)$ هو امتداد غير منته لحقل الأعداد النسبية
 $(Q, +, \cdot)$.

مثال (2) :

العددان $\sqrt[3]{2}$ و i جبريان على حقل الأعداد النسبية Q لأنهما جذران لكثيرة الحدود:
 $x^3 - 2$ و $x^2 + 1$ على الترتيب .

مثال (3) :

بين أن العدد $u = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ جبري على الحقل Q .

الحل :

$$u = \sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow u^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$u^2 - 5 = -2\sqrt{6} \Rightarrow (u^2 - 5)^2 = 24$$

وبالتالي

ومنه نجد :

$$u^4 - 10u^2 + 1 = 0$$

ملاحظة (1) :

الأعداد الحقيقية والمركبة ليست جميعها أعداداً جبرية على حقل الأعداد النسبية Q ، ففي عام 1873 ، أثبت الرياضي هيرميت Hermit أن العدد النيبيري e متسام ، وشارك في برهان ذلك الرياضي الألماني هيلبرت (Hilbert) ، كما أثبت الرياضيان جلفاند Gelfond وشنايدر Schneider أنه إذا كان v, u عدنان جبريان ، وكان v عدد غير نسبي فإن a^b عدد متسام على الحقل Q .
وبرهن الرياضي الألماني لندمان Lindemann أن العدد π متسام ، وكان ذلك في عام 1882 .

مبرهنة (1) :

إذا كان $E \supseteq F$ امتداداً منتهياً ، أي أن $[E : F] = n$ ، وليكن u عنصراً من الحقل E ، عندئذٍ توجد كثيرة حدود غير صفرية $f(x) \in F[x]$ بحيث تكون $f(u) = 0$ و $\deg f \leq n$.

البرهان :

العناصر التي عددها $(n+1)$ التالية $1, u, u^2, \dots, u^n$ من الحقل E ليست مستقلة خطياً ، لأن $\dim_F E = n$ وبالتالي ، فإن المعادلة :

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n = 0$$

محقة ، لبعض قيم a_i من F ، التي جميعها غير معدومة .

الآن وبأخذ كثيرة الحدود $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ نحصل على المطلوب .

ملاحظة (2) :

لتكن A مجموعة جميع الحقول الجزئية من E ، حيث E امتداداً للحقل F ،

والتي تحوي العنصر a والحقل F . نعلم أن تقاطع مجموعة من الحقول الجزئية في E هو حقل جزئي أيضاً في E ، إذن تقاطع جميع الحقول الجزئية من A هو حقل جزئي في E ، نرسم عادةً له بالرمز $F(a)$ ، إن هذا الحقل يحوي كلاً من العنصر a والحقل F ، لأنه حقل جزئي من A ، كما أن $F(a)$ هو أصغر حقل جزئي من E يحوي العنصر a والحقل F .

تعريف (5) الامتداد البسيط Simple extension :

ليكن E امتداداً للحقل F ، وإذا كان $a \in E$ ، نقول إن E امتداد بسيط للحقل F ، إذا كان $E = F(a)$.

مثال (4) :

أثبت أن $C = R(i)$ ، حيث C حقل الأعداد المركبة.

الحل :

إن $C \subseteq R(i)$ ، لأن الحقل $R(i)$ يحوي جميع عناصر الحقل R والعنصر i وبالتالي يحوي جميع الأعداد المركبة التي من الشكل $z = x + iy$ حيث أن $x, y \in R$. وبما أن $R(i) \subseteq C$ ، لأنه أصغر حقل يحوي R والعنصر i ، إذن $C = R(i)$.

مثال (5) :

أثبت أن $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$

الحل :

لنكتب أولاً : $E = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$

من الواضح، أن المجموعة E محتواة في أي حقل جزئي يحتوي Q والعنصر $\sqrt{2}$ وبالتالي يكون $E \subseteq Q(\sqrt{2})$.

من ناحية ثانية المجموعة E هي حلقة تحتوي على Q و $\sqrt{2}$ ، لذلك يكون $Q(\sqrt{2}) \subseteq E$ ، وينتج ذلك، أنه إذا أثبتنا حقل جزئي من R .

إذا كان $u = a + b\sqrt{2} \neq \phi$ عنصراً ما من E ، فيكون لدينا :

$$u(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \neq 0$$

وكذلك :

$$u^{-1} = \frac{1}{a^2 - 2b^2} (a - b\sqrt{2}) \in E$$

مثال (6) :

إذا كان $E \supseteq F$ حقلين ما ، وكان u من E ، عندئذٍ $F(u) = F$ إذا وفقط إذا كان $u \in F$.

ملاحظة (3) :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، ولتكن العناصر v, u من E ، عندئذٍ $E \supseteq F(u)$ ، يمكن تعريف الامتداد $F(u).v$ والذي يمكن اعتباره حقلاً جزئياً من الحقل E يحوي كلاً من العنصرين v, u والحقل F ، وبالتالي يكون لدينا $F(u, v) \subseteq F(u).F(v)$ ، كذلك الحقل الجزئي $F(u, v)$ يحوي الحقل $F(u)$ ، لأنه يحوي u و F معاً وأيضاً يحوي العنصر v ، وبالتالي يكون لدينا $F(u, v) \subseteq F(u)(v)$.

نستنتج مما سبق أن :

$$F(u)(v) = F(u, v)$$

تعريف (6) الحقل المولد Generated field :

ليكن E امتداداً للحقل F ، ولتكن u_1, u_2, \dots, u_n عناصر من E . نسمي الحقل المكون من ضم العناصر u_1, u_2, \dots, u_n إلى الحقل F ، بالحقل المولد بالعناصر u_1, u_2, \dots, u_n على الحقل F .

تعريف (7) كثيرة الحدود الصغرى Minimal polynomial :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، وكان $u \in E$ عنصراً جبرياً على F ، نسمي كثيرة الحدود الواحدة $m = m(x)$ والتي درجتها أصغر ما يمكن ، حيث أن $m(u) = 0$ بكثيرة حدود صغرى (الأصغرى) للعنصر u على الحقل F ، ودرجة كثيرة الحدود الصغرى m تسمى بدرجة العنصر u على F ، ونرمز لذلك بـ $\deg_F(u)$.

مبرهنة (2) :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، وليكن $u \in E$ عنصراً جبرياً على الحقل F ،
وبفرض أن $m = m(x)$ كثيرة حدود صغرى ، عندئذ يتحقق ما يلي :

(1) m غير قابلة للتحليل على الحقل F .

(2) إذا كانت $f = f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود على الحقل F ، فإن $f(u) = 0$ ،
إذا ، فقط إذا كان m/f .

(3) $m(x)$ كثيرة حدود وحيدة تتحدد بالعنصر u .

البرهان :

(1) نفرض أن $m(x) = f(x).g(x)$ في $F[x]$ ، حيث أن $\deg f < \deg m$ ،
و $\deg g < \deg m$. عندئذ يكون $f(u)g(u) = m(u) = 0$ وهذا يؤدي إلى أن
 $f(u) = 0$ أو $g(u) = 0$ وهذا يناقض كون $m(x)$ كثيرة حدود صغرى . وبالتالي ،
فإن $m(x)$ غير قابلة للتحليل على الحقل F .

(2) إذا كان $f(u) = 0$ ، وباستخدام خوارزمية القسمة ، نكتب : $f = q.m + r$
في $F[x]$ ، حيث أن $r = 0$ أو $\deg r < \deg m$. عندئذ يكون :

$$r(u) = f(u) - q(u)m(u) = 0$$

وهذا يؤدي إلى أن اختيار $r \neq 0$ يتناقض مع مفهوم كثيرة الحدود الصغرى $m(x)$ ،
إذن $r = 0$ ، وهذا يعطي m/f .

من الواضح برهان العكس .

(3) لتكن m' كثيرة حدود صغرى أخرى ، وبحيث يكون $m'(u) = 0$ ، ومن
(2) نجد أن m/m' ، وبسبب (2) أيضاً نجد أن m'/m ، وبالتالي $m = m'$ (لأن
كل منهما كثيرة حدود واحدة) .

مثال (7) :

أوجد كثيرة الحدود الصغرى للعنصر $u = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ على الحقل $(Q, +, \cdot)$.

الحل :

لدينا $u^2 = 1 + \sqrt{3}$ ومنه يكون $u^2 - 1 = \sqrt{3}$ وبالتالي يكون $(u^2 - 1)^2 = 3$ ،
أي أن $u^4 - 2u^2 - 2 = 0$ كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل في $Q[x]$ ، وبالتالي فهي
كثيرة حدود صغرى للعنصر الجبري u على Q ، ومنه نجد : $\deg_Q(u) = 4$.
سنبرهن في قسم التمارين المحلولة، الحقيقية التالية ، والتي سنستخدمها في صحة
برهان المبرهنة القادمة :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، وإذا كان u من E ، عندئذٍ التطبيق $\varphi_u : F \longrightarrow E$ ،
والمعرف بالشكل التالي : $\varphi_u(f(x)) = f(u)$ ، حيث أن :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n u_i \cdot x^i \in F[x]$$

مبرهنة (3) :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، وإذا كان $u \in E$ عنصراً جبرياً على الحقل F
درجته n ، عندها يتحقق ما يلي :

$$F(u) = \{a_0 + a_1u + \dots + a_nu^{n-1} : a_i \in F\} \quad (1)$$

$$= \{f(u) : f(x) \in F[x]\}$$

(2)- المجموعة $\{1, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$ تشكل أساساً (قاعدة) للامتداد $F(u)$ على

الحقل F ، بحيث يكون :

$$\deg_F(u) = [F(u) : F] = n$$

(3)- $F(u) \cong F[x]/\langle m \rangle$ ، حيث أن m كثيرة حدود صغرى للعنصر u

على الحقل F .

البرهان :

حسب الحقيقة التي سبقت هذه المبرهنة ، إن التطبيق φ_u يشكل تشاكل حلقى من
الحلقة $F[x]$ إلى الحقل E ، كما أن :

$$\text{Ker } \varphi = \{f(x) : f(u) = 0\} = \langle m \rangle$$

لأن m كثيرة حدود صغرى للعنصر u على الحقل F ، وحسب النظرية الأساسية الأولى في التماثل يكون :

$$F[x]/\langle m \rangle \cong \text{Im } \varphi = \{ f(u) : f(x) \in F[x] \}$$

الآن ، $\text{Im } \varphi \subseteq F(u)$ ، لأن $F(u)$ حقلاً يحوي العنصر u والحقل F وبالتالي فهو يحوي $f(u)$ ، لكل $f(x) \in F[x]$ ، وبما أن $F[x]/\langle m \rangle$ حقلاً ، حيث أن m كثيرة حدود غير قابلة للتحويل ، يكون أيضاً $\text{Im } \varphi$ حقلاً يحوي الحقل F والعنصر u ، أي أن $F(u) \subseteq \text{Im } \varphi$. وهكذا يكون :

$$F(u) = \text{Im } \varphi = \{ f(u) : f(x) \in F[x] \}$$

وبهذه الصورة نكون قد أثبتنا صحة الشرطين (1) و(3) من نص المبرهنة .

لنثبت الآن أن المجموعة $B = \{1, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$ تشكل أساساً للامتداد $F(u)$ على الحقل F .

لنثبت أولاً أن المجموعة B مستقلة خطياً . ليكن :

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^{n-1} = 0$$

لكل $a_i \in F$ و $0 \leq i \leq n-1$. عندئذ $g(u) = 0$ ، حيث أن :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

و $g(x) \in F[x]$ ، وهذا يناقض حقيقة أن m كثيرة حدود صغرى . إذن $g(x) = 0$ ، لذا $a_i = 0$ من أجل جميع قيم i . إذن المجموعة B مستقلة خطياً .

لنبرهن أخيراً أن المجموعة B تولد الامتداد $F(u)$ على الحقل F . من أجل ذلك نفرض أن $f(u) \in F(u)$ ولنكتب حسب خوارزمية القسمة :

$f = q.m + r$ في $F[x]$ و $r = 0$ أو $\deg r < \deg m = n$ و $r, q \in F[x]$ ، وبالتالي يكون :

$$r(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} ; a_i \in F$$

وبسبب $m(u) = 0$ ، نحصل على :

$$f(u) = q(u) m(u) + r(u) = r(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1}$$

أي أن المجموعة B تولد $F(u)$. إذن المجموعة B تشكل أساساً للحقل $F(u)$ على الحقل F ويكون أيضاً :

$$\deg_F(u) = [F(u) : F] = n$$

ملاحظة (4) :

يلاحظ من المبرهنة السابقة الشرط (3) أن الحقل F وكثيرة الحدود الصغرى m للعنصر الجبري u ، تحددان تماماً الامتداد $F(u)$ ، وبالتالي ، فإذا كان للعنصرين u, v كثيرة الحدود الصغرى نفسها على الحقل F ، فإن $F(u) \cong F(v)$. كما تبين المبرهنة السابقة الشرط (1) كيفية إيجاد الامتداد $F(u)$ ، وما هي العناصر التي يمكن ضمها إلى الحقل F . ووصف عملية الضرب في امتداد ما . والأمثلة التالية توضح ما سبق .

(3-6) أمثلة :

مثال (8) :

$$[Q(\sqrt[4]{5}i) : Q] = 4 \text{ و } Q[\sqrt[4]{5}i] \cong Q[x] / \langle x^4 - 5 \rangle$$

الحل :

بما أن $\sqrt[4]{5}i$ هو جذر لكثيرة الحدود $x^4 - 5$ وهي غير قابلة للتحليل على Q ، فحسب المبرهنة السابقة نجد أن :

$$Q[\sqrt[4]{5}i] \cong Q[x] / \langle x^4 - 5 \rangle$$

مثال (9) :

ليكن u جذراً لكثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 1 \in F[x]$ في امتداد الحقل E للحقل R (حقل الأعداد الحقيقية)، أثبت أن الحقل $R(u) = \{a + b.u : a, b \in R\}$ يحوي جميع أصفار $f(x)$.

الحل :

الحقل $R(u)$ بشكل فضاء متجهي على الحقل R ، أساسه $\{1, u\}$ ، وبالتالي فإن : $R(u) = \{a + b.u : a, b \in R\}$ ، وبما أن u جذراً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فإن $-u$ يكون جذراً ، وبالتالي فإن $R(u)$ يحوي جميع جذور كثيرة الحدود $f(x)$ ، وكذلك الجذر $u = \sqrt{-1}$.

عادةً نسمي $R(u)$ بحقل الأعداد المركبة ، ويرمز لها بـ C .

مثال (10) :

صف عملية الضرب في الامتداد $Q(1+i)$ للحقل Q .

الحل :

لنضع $u = 1 + i$ ، وبالتالي يكون لدينا : $i^2 = (u - 1)^2 = -1$ ومنه يكون
 $u^2 - 2u + 2 = 0$.

بأخذ $m(x) = x^2 - 2x + 2$ ، نجد أن $m(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على Q (لأنه لا يوجد لها جذور في Q) ، وبالتالي تكون $m(x)$ كثيرة حدود صغيرة للعنصر u .

وبالتالي يكون لدينا :

$$Q(u) = \{a + b.u : a, b \in Q\}$$

وحسب المبرهنة السابقة و $u^2 = 2u - 2$ يكون :

$$\begin{aligned} (a + bu)(a' + b'u) &= aa' + (ab' + ba')u + bb'u^2 \\ &= (aa' - 2bb') + (ab' + ba' + 2bb')u \end{aligned}$$

مبرهنة (4) مبرهنة الضرب Multiplication theorem :

إذا كان K امتداداً للحقل E ، وكان E امتداداً للحقل F ، عندئذ يكون امتداد الحقل K للحقل F منتهياً إذا ، فقط إذا ، كان $[K : E]$ و $[E : F]$ منتهياً ، وفي هذه الحالة يتحقق :

$$[K : F] = [K : E] \cdot [E : F]$$

بالإضافة لذلك ، إذا كانت المجموعة $\{e_1, \dots, e_m\}$ تشكل أساساً للحقل E على F والمجموعة $\{k_1, \dots, k_n\}$ أساساً للحقل K على E ، فإن المجموعة $B = \{e_i k_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ تشكل أساساً لـ K على F .

البرهان :

إذا كان $[K : F]$ منتهياً ، فإن $[E : F]$ يكون منتهياً أيضاً ، بسبب أن فضاء جزئي من K على F . من جهة ثانية ، من أجل أي أساس لـ K على F يكون

[K : E] منتهي .

لنبرهن على العكس ، باستخدام الرموز الواردة في نص المبرهنة ، لنبرهن أن المجموعة B تشكل أساساً للحقل K على F .

لنثبت أولاً أن B تولد K على F . من أجل $c \in K$ ، وبسبب كون المجموعة $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ تشكل أساساً لـ K على E ، نكتب :

$$c = \sum_{j=1}^n b_j \cdot K_j \quad (*)$$

حيث أن $b_j \in E$ ، لكل j . لكن من أجل كل j ، يكون لدينا $b_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i$ ، حيث $a_{ij} \in F$ لكل i, j ، وبالتعويض في عبارة (*) نجد :

$$c = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i \right) k_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i \cdot k_j$$

ينتج من ذلك أن المجموعة B مولدة بالحقل K على F .

لنثبت أخيراً ، أن المجموعة B مستقلة خطياً على الحقل F .

لنكن $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i \cdot k_j = 0$ ، حيث $a_{ij} \in F$ لكل i, j عندئذ يكون :

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i \right) k_j = 0$$

وهذا يعني أن المجموعة $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ مستقلة

خطياً على E ، $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i = 0$ لكل قيم j . لكن $a_{ij} = 0$ ، لكل قيم i, j لأن

$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ مستقلة خطياً على F . ينتج من ذلك أن المجموعة B مستقلة خطياً على الحقل F .

تعطي مبرهنة الضرب السابقة العلاقة العددية بين الأبعاد ، والتي تلعب دوراً مهماً في نظرية الحقول ، وبالتالي ، فإن هذه المبرهنة لها دوراً مهماً كما لمبرهنة لاغرانج في نظرية الزمر .

نتيجة (1) :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، وليكن $u \in E$ عنصراً جبرياً على الحقل F .
وبفرض أن $v \in f(u)$ ، عندئذٍ v عنصر جبري على F ويكون :
• $\deg_F(v)/\deg_F(u)$

البرهان :

لدينا أولاً : $F(u) \supseteq F(v) \supseteq F$ ، وبسبب $F(u) \supseteq F$ منته ، و $v \in F(u)$ عنصر جبري على F ، يكون لدينا (حسب مبرهنة سابقة) :

$$\deg_F(v) = [F(v) : F] , \deg_F(u) = [F(u) : F]$$

وحسب مبرهنة الضرب السابقة نجد أن :

$$\deg_F(v)/\deg_F(u)$$

مثال (11) :

إذا كان $u = \sqrt[3]{2}$ ، أثبت أن $Q(u) = Q(u^2)$.

الحل :

لدينا $Q \subseteq Q(u) \subseteq Q(u^2)$ ، $[Q(u) : Q] = \deg_Q(u) = 3$ ، لأن كثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 2 \in Q[x]$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$. وبما أن u جذراً لها و $f(x)$ واحدة ، إذن كثيرة الحدود $f(x)$ صغرى للعنصر u على الحقل Q . لنبرهن الآن أن :

$$\deg_Q(u^2) = [Q(u^2) : Q] = 3$$

بما أن $u^2 \in Q(u)$ ، فإن $\deg_Q(u^2)/\deg_Q(u) = 3$ ، وحسب النتيجة السابقة فإن $\deg_Q(u^2) = 1$ أو $\deg_Q(u^2) = 3$. لكن $\deg_Q(u^2) \neq 1$ ، لأن الحالة الثانية تؤدي إلى أن $u^2 \in Q$ ، وهذا تناقض ، إذن $\deg_Q(u^2) = 3$.

مبرهنة (5) :

يكون E امتداداً منتهياً للحقل F ، إذا ، فقط إذا كان $E = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ،

حيث $u_i \in E$ عناصر جبرية على F .

البرهان :

لنفرض ، أولاً أن $[E : F]$ منتهي ، وبطريقة الاستنتاج الرياضي على $[E : F]$

نبرهن أن :

. $E = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ حيث u_i عناصر جبرية على F .

إذا كان $[E : F] = 1$ ، فإن $E = F = F(1)$.

ليكن $[E : F] > 1$ ، أي أن $E \neq F$ ، ولنختار $u \in E$ و $u \notin F$ ، عندها يكون

$[F(u) : F] > 1$ ، بسبب كون $u \notin F$ ، وباستخدام مبرهنة الضرب نكتب :

$$[E : F(u)] = \frac{[E : F]}{[F(u) : F]} < [E : F]$$

بتطبيق طريقة الاستنتاج للتمديد المنتهي $E \supseteq F(u)$ ، نحصل على :

$$E = F(u)(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

علماً أن العناصر u, u_1, \dots, u_n جبرية على F ، (وذلك حسب مبرهنة سابقة) .

لنبرهن الآن على العكس :

إذا كان $E = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ حيث أن u_i عناصر جبرية على الحقل F حيث

$1 \leq i \leq n$ ، وباستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي على العدد n ، نجد أنه إذا كان

$n = 1$ ، فإنه (حسب المبرهنة قبل الأخيرة) يتم المطلوب .

لنفرض الآن ، أن $n > 1$ ، ولنكتب $L = F(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$. عندها يكون لدينا :

$E \supseteq L \supseteq F$ و $[L : F]$ منتهي أيضاً ، حسب طريقة الاستنتاج الرياضي ، يوضع

$E = L(u_n)$ ، يكون $[E : L]$ منتهياً ، (حسب المبرهنة قبل الأخيرة) .

إذن $[E : F]$ يكون منتهياً وذلك حسب مبرهنة الضرب .

نتيجة (2) :

إذا كان E امتداداً للحقل K ، وكان K امتداداً للحقل F . أي أن $K \supseteq E \supseteq F$ ،

عندئذ يكون الامتداد E للحقل F جبرياً إذا ، و فقط إذا ، كان كل من الامتدادين E

للحقل K و K للحقل F جبرياً .

البرهان :

لنبرهن أن الامتداد E للحقل F جبرياً ، أما عكس ذلك فهي واضحة .
ليكن $E \supseteq F$ و $K \supseteq E$ امتدادين جبريين ، وليكن $u \in E$ ولنثبت أن العنصر u جبري على F .

لنبين أولاً أن العنصر u يقع في امتداد منته للحقل F . بسبب أن $K \supseteq E$ جبري ،
ليكن $f(u) = 0$ حيث $f(x) \in E[x]$ ، $0 \neq f(x)$.
إذا كان $f(x) = e_0 + e_1x + \dots + e_nx^n$ ، وبأخذ $L = F(e_0, \dots, e_n)$ ، عندها
يكون $u \in L(u) \supseteq F$ امتداد منتهي . كذلك $L(u) \supseteq L \supseteq F$ وهذا ناتج
من المبرهنة قبل الأخيرة ، كذلك $K \supseteq L$ امتداد منتهي (حسب المبرهنة الأخيرة) .
إذن $K \supseteq F$ جبري .

تعريف (8) إغلاق الجبري (اللمصافة الجبرية) algebraic closure :

ليكن E امتداداً للحقل F ، نسمي الحقل F_1 المعرف بالمجموعة التالية :

$$F_1 = \{u \in E : u \text{ عنصر جبري على } F\}$$

باللمصافة الجبرية لـ F في E ، أو بالإغلاق الجبري لـ F في E .

تعريف (9) حقل الأعداد الجبرية Field of algebraic numbers :

نسمي الحقل المعرف بالشكل :

$$A = \{u \in \mathbb{C} : u \text{ عنصر جبري على } \mathbb{Q}\}$$

بحقل الأعداد الجبرية .

الحقل A يبين لنا أن كل امتداد منتهي هو امتداد جبري ، لكن العكس ليس صحيحاً . أي ليس من الضروري أن يكون كل امتداد جبري امتداداً منتهياً .

(4-6) حقول الانشطار Splitting Fields :

يعد الرياضي كرونير (1823-1891) Kronecker أول من أوجد هذا الامتداد ، وذلك في منتصف القرن التاسع عشر .

إذا كان $u \in E$ عنصراً جبرياً على F حيث أن E امتداد للحقل F ، نعلم أن :

$$F[x]/\langle m \rangle \cong F(u) = \{a_0 + a_1u + \dots + a_{n-1}u^{n-1} : a_i \in F\}$$

حيث أن $m = m(x)$ كثيرة حدود صغيرة (غير قابلة للتحليل) للعنصر u على F و $\deg m = n$ ، وبالتالي، فإن الامتداد $F(u)$ للحقل F يتعلق بالعنصر u وبالحقل F ، وليس له ارتباط بالحقل E . لندرس الحقل $F(u)$ بعمق أكثر من كونه حقلاً جزئياً من الحقل E .

والهدف الآخر، هو إيجاد امتداد للحقل F يحوي جذراً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، حيث $f(x) \in F[x]$. من أجل ذلك نقدم أولاً مبرهنة كروننكر.

مبرهنة (6) مبرهنة كروننكر Kronecker theorem :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما، وإذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير ثابتة من $F[x]$ ، عندئذ يوجد امتداد E للحقل F ، وعنصر u من E بحيث يكون $f(u) = 0$.

البرهان :

يمكن كتابة كثيرة الحدود $f(x)$ في الحلقة $F[x]$ ، بالشكل $f(x) = g(x)h(x)$ ، حيث h, g كثيرتي حدود غير قابلة للتحليل. كما أن كثيرة الحدود $g(x)$ هي إحدى عوامل $f(x)$ وغير قابلة للتحليل على F .

ولنبرهن على وجود امتداد E للحقل F يحوي العنصر u وبحيث $g(u) = 0$.

إن $g(x)$ تشكل مثالية أعظمية في الحلقة $F[x]$ ، وبالتالي يكون $F[x]/\langle g \rangle$ حقل، ولنثبت أن الحقل F يتطابق مع حقل جزئي من الحقل $F[x]/\langle g \rangle$.

من أجل ذلك، لنعرف التطبيق $\varphi: F \longrightarrow F[x]/\langle g \rangle$ بالشكل التالي :

$$\varphi(u) = u + \langle g \rangle ; u \in F$$

يمكن البرهان بسهولة، أن هذا التطبيق تقابلاً، ونلاحظ، أيضاً، أنه يوجد تماثل للحقل F مع $\{u + \langle g \rangle ; u \in F\}$ وبالتالي، الحقل $F[x]/\langle g \rangle$ هو امتداد للحقل F .

لنثبت الآن أن هذا الامتداد يحوي أصفاراً لكثيرة الحدود $g(x)$. من أجل ذلك، إذا كان $u = x + \langle g \rangle$ ، حيث $u \in E$ ، وحسب التماثل $\varphi_u: F[x] \longrightarrow E$ نجد

أن كثيرة الحدود :

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n ; a_i \in F$$

فإن :

$$\varphi_u(g(x)) = a_0 + a_1(x + \langle g \rangle) + \dots + a_n(x + \langle g \rangle)^n$$

في $E = F[x]/\langle g \rangle$ ، وبالتالي يكون :

$$g(u) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + \langle g \rangle = g(x) + \langle g \rangle = \langle g \rangle = 0$$

في الحقل $E = F[x]/\langle g \rangle$. ومنه يوجد عنصر $u \in E$ بحيث $g(u) = 0$ إذن

$$. f(a) = 0$$

المثال التالي يوضح مبرهنة كروننكر السابقة .

مثال (12) :

أوجد امتداداً للحقل R يحوي جذوراً لكثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 1 \in R[x]$

على R .

الحل :

نلاحظ أولاً ، أن كثيرة الحدود $x^2 + 1$ غير قابلة للتحليل على حقل الأعداد

الحقيقية R ، ولا تحوي جذوراً فيه ، وبالتالي ، فإن كثيرة الحدود $\langle f \rangle$ تشكل

مثالية أعظمية في الحلقة $R[x]$ ، ويكون $R[x]/\langle f \rangle$ حقلاً . لنطبق كل عنصر

u من R بعنصر $u + \langle f \rangle$ من الحلقة $R[x]$ (نعتبر في هذه الحالة أن حقل

جزئي من الحقل $(R[x]/\langle f \rangle)$.

إذا كان $u = x + \langle f \rangle$ ، وبالتالي ، فإن :

$$u^2 + 1 = (x + \langle x^2+1 \rangle)^2 + (1 + \langle x^2+1 \rangle) = (x^2+1) + (x^2+1) = 0$$

وهذا يعني أن u هو جذر لكثيرة الحدود $f(x)$.

يستفاد من مبرهنة كروننكر السابقة ، في تشكيل حقول ذات رتبة معلومة . والمثال

التالي يوضح ذلك .

مثال (13) :

شكّل حقلاً رتبته تساوي العدد 8 .

الحل :

لتكن كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + x + 1$ ، نلاحظ أولاً أن $f(x)$ غير قابلة للتفكيك على الحلقة Z_2 (لا يوجد فيها جذور في Z_2) . وبالتالي ، فإن $\langle f \rangle$ تشكل مثالية أعظمية في الحلقة $Z_2[x]$ ، ويكون الحقل $E = Z_2[x]/\langle f \rangle$ امتداداً للحقل Z_2 ، كما أنه لكثيرة الحدود $f(x)$ جذوراً في الحقل E ، ويكون $[E : Z_2] = 3$ وبالتالي يكون لدينا :

$$E = Z_2(u) = \{a_0 + a_1u + a_2u^2 ; a_i \in Z_2, f(u) = 0\}$$

$$= \{0, 1, u, u^2, 1+u, 1+u^2, u+u^2, 1+u+u^2, u^3 = u+1\}$$

ويكون أيضاً $|E| = 8$.

لنعرف الآن حقل الانشطار Spilting field .

تعريف (9) :

لتكن $f(x)$ كثيرة حدود في $F[x]$ على الحقل F ، ومن الدرجة n حيث $n \geq 1$. نسمي الامتداد E للحقل F بحقل الانشطار لكثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل F ، إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$f(x) = a(x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n) \quad (1)$$

حيث أن a من F و u_i من E ، لكل قيم i .

$$E = F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2)$$

الشرط الأول الوارد في التعريف السابق يعني أن كثيرة الحدود $f(x)$ تشطر (Split) على الحقل E . كما أنه ، إذا كان E حقلًا انشطارياً لـ $f(x)$ على الحقل F ، فإن الحقل الجزئي الوحيد في E ، والذي يحوي F وتنشطر فيه كثيرة الحدود $f(x)$ هو الحقل E نفسه .

يمكن تعريف حقل الانشطار بالشكل التالي :

إن أصغر امتداد جبري للحقل F ، والذي يحوي جميع جذور كثيرة الحدود $f(x)$ من $F[x]$ يسمى حقلًا انشطارياً لكثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل F .

من التعريف السابق ، نجد أن كل حقل ، وليكن F ، يكون حقلاً انشطاريًا لكثيرة الحدود الخطية $f(x) \in F[x]$ على الحقل F .

مثال (14) :

يبين أن الحقل $Q(i)$ هو حقل انشطاري لكثيرة الحدود $x^2 + 1$ على Q .

الحل :

بما أن $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ و $Q(i, -i) = Q(i)$ ، فإن الحقل $Q(i)$ هو حقل انشطاري لـ $x^2 + 1$ على Q .

تعطي المبرهنة التالية ، عدد الجذور لكثيرة الحدود $f(x)$ من $F[x]$ ، علماً أن $E \supseteq F$.

مبرهنة (7) :

لتكن f كثيرة حدود من الدرجة n ، حيث $n \geq 1$ على حقل F ، عندئذ يوجد حقل انشطاري $E \supseteq F$ لـ f على F يحوي n جذراً لـ $f(x)$ ، ويكون $[E : F] = n!$.

البرهان :

تبرهن بطريقة الاستنتاج الرياضي على n حيث $n \geq 1$.

إذا كان $n = 1$ ، بأخذ $E = F$ ، ستكون المبرهنة محققة .

نفرض الآن أن $n > 1$ ، ولتكن $g(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحويل وهي إحدى عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ ، وبالتالي حسب مبرهنة كرونكر يوجد امتداد E يحوي الحقل F وجميع جذور $g(x)$.

نفرض أن $u_1 \in E$ ، وبوضع $E_1 = F(u_1)$ ، نحصل : $\deg g = \{E : F\} \leq n$ ، وبالتالي يكون : $f(x) = (x - u_1) q(x)$ في الحلقة $E_1[x]$ ، حيث أن $\deg q = n - 1$.

بتطبيق طريقة الاستنتاج الرياضي مرة ثانية ، نجد أنه يوجد امتداد وليكن E_2 للحقل E_1 ، وهو عبارة عن حقل انشطاري لكثيرة الحدود $q(x)$ على الحقل E_1 ،

ويكون أيضاً: $[E_2:E_1] \leq (n-1)!$ وبالتالي :

$$g(x) = a(x - u_2) \dots (x - u_n) ; a \in E_1, u_i \in E$$

لكل $2 \leq i \leq n$ ، ومنه يكون :

$$E_2 = E_1(u_2, \dots, u_n) = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

وهذا يعني أن E_2 حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل F ، حيث أن :

$$[E_2 : F] = [E_2 : E_1] [E_1 : F] = (n-1)! \cdot n = n!$$

وذلك حسب مبرهنة الضرب .

مثال (15) :

أوجد حقل انشطار كثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 2x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ ، وبحيث يكون $[E:\mathbb{Q}] = 4$.

الحل :

بما أن $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ ، فإن جذور $f(x)$ في الحقل \mathbb{C} هي $\pm\sqrt{3}$ و $\pm i$ ، وبالتالي فإن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ حقل انشطار كثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل \mathbb{Q} ، حيث $E = \mathbb{Q}(i)$ و $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ، وبالتالي يكون :

$$[E : \mathbb{Q}] = [E : K] [K : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$$

مثال (16) :

لتكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، أثبت أن أي حقل انشطار لكثيرة الحدود من الدرجة الثانية $f(x) \in F[x]$ على الحقل F يشكل امتداداً بسيطاً $F(u)$ للحقل F .

الحل :

ليكن $E \supseteq F$ حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x)$. وإذا كان :

$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$ ، وإذا كان u, v جذرين لـ f في E عندئذ يكون :

$$f(x) = a(x - u)(x - v)$$

في $E[x]$ ، وبالمقارنة بين معاملات x العلاقتين نجد أن : $b = -a(u + v)$

وبالتالي يكون : $v = -u - a^{-1}b \in F(u)$ ، إذن :

$$E = F(u,v) = F(u)$$

تعريف (10) الحقل المغلق جبرياً Algebraically closed field :

نقول عن الحقل C إنه مغلق جبرياً إذا تحقق إحدى الشروط المتكافئة التالية :

- (1) كل كثيرة حدود غير ثابتة في $C[x]$ تملك جذر في C .
- (2) كل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في $C[x]$ لها الدرجة 1 .
- (3) كل كثيرة حدود غير ثابتة في $C[x]$ تنشط في $C[x]$.
- (4) إذا كان $E \supseteq C$ امتداد جبري ، عندها يكون $E = C$.

مثال (17) :

إن حقل الأعداد المركبة C مغلق جبرياً .

إن الحقل (Z_p, \oplus, \otimes) ، حيث P عدد أولي ليس مغلق جبرياً، لأن كثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 1 \in Z_p[x]$ لا تملك جذوراً في الحقل (Z_p, \oplus, \otimes) .

تعريف (11) العناصر المترافقة Conjugates elements :

ليكن E امتداداً جبرياً للحقل F ، نقول عن العنصرين u, v من E ، إنهما مترافقان على الحقل F ، إذا كان كل من العنصرين u, v جذراً لكثيرة حدود نفسها غير قابلة للتحليل على الحقل F .

مثال (18) :

العنصران $a + ib$ و $a - ib$ من حقل الأعداد المركبة C مترافقين على الحقل R ، لأنهما يشكلان جذرين لكثيرة الحدود $f(x) = (x - a)^2 + b \in R[x]$ على R .

مبرهنة (8) :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وإذا كان u, v عنصران جبريان على F ، وإذا كان $f(x)$ كثيرة حدود صغرى للعنصر u من الدرجة n على F ، عندئذٍ : التطبيق

$\varphi : F(u) \longrightarrow F(v)$ والمعرف بالشكل :

$$\varphi(a_0 + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1}) = a_0 + a_1 v + \dots + a_{n-1} v^{n-1}$$

يشكل تماثلاً ، إذا ، فقط إذا كان العنصران v, u مترافقين على الحقل F .

البرهان :

لنبرهن أولاً ، أنه إذا كان v, u مترافقين على الحقل F ، فإن التطبيق φ يشكل تماثلاً .

ليكن $m = m(x)$ كثيرة الحدود الصغرى للعنصرين v, u على F ، وبالتالي فإن للتشاكلين :

$$\varphi_v : F[x] \longrightarrow F(v)$$

$$\varphi_v(f(x)) = f(v)$$

$$\varphi_u : F[x] \longrightarrow F(u)$$

$$\varphi_u(f(x)) = f(u)$$

النواة نفسها ، أي أن :

$$\text{Ker } \varphi_u = \text{Ker } \varphi_v = \langle m(x) \rangle$$

وبالتالي يوجد تماثلان :

$$\varphi'_u : F[x]/\langle m(x) \rangle \longrightarrow F(u)$$

$$\varphi'_u(f(x) + \langle m(x) \rangle) = f(u)$$

$$\varphi'_v : F[x]/\langle m(x) \rangle \longrightarrow F(v)$$

$$\varphi'_v(f(x) + \langle m(x) \rangle) = f(v)$$

لنفرض الآن أن $\varphi = \varphi_v \cdot \varphi_u^{-1}$ ، وبالتالي نجد أن التطبيق φ هو التماثل من الحقل $F(u)$ على الحقل $F(v)$ ، لأنه من العلاقة :

$$a_0 + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1} \in F(u)$$

نجد أن :

$$\varphi_v \circ \varphi_u^{-1} (a_0 + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1}) = \varphi_v [a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \langle m(x) \rangle]$$

$$= a_0 + a_1 v + \dots + a_{n-1} v^{n-1}$$

برهان العكس :

لنبرهن أن العنصرين v, u مترافقان .

ليكن φ تماثلاً من الحقل $F(u)$ على الحقل $F(v)$. ولنفرض أن :

$$m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + x^n$$

$$m(u) = a_0 + a_1 u + \dots + u^n$$

وكذلك يكون $m(v) = 0$. إذن كثيرة الحدود الصغرى $m'(x)$ للعنصر v على

الحقل F تقسم $m(x)$.

لنأخذ التماثل : $\varphi^{-1}: F(v) \rightarrow F(u)$ ، وبإجراء نفس الخطوات السابقة نجد أن

$m(x)$ يقسم $m'(x)$ ، وبما أن $m(x)$ و $m'(x)$ كثيرتي حدود واحديتين ، فنجد

$$m(x) = m'(x) \text{ أي أن العنصرين } v, u \text{ مترافقان .}$$

(5-6) الحقول المنتهية Finite Fields :

تسمى الحقول المنتهية باسم حقول جالوا (Galois fields) ويعود السبب في ذلك ، أنه عندما درس الرياضي الفرنسي جالوا قابلية حل المعادلات الجبرية ، ظهر مفهوم الحقول المنتهية . وهي الحقول التي عدد عناصرها منتهي . ولهذه الحقول تطبيقات عديدة في البنى الجبرية وفي نظرية التشفير وفي العلوم الهندسية أيضاً .

مثال (19) :

إن حقل الأعداد الصحيحة قياس العدد الأولي P ($\mathbb{Z}_P, \oplus, \otimes$) تشكل حقلاً منتهياً .

مبرهنة (9) :

إذا كان E امتداداً منتهياً للحقل المنتهي F ، درجته n ، وإذا كان عدد عناصر

الحقل F هو q ، عندئذ عدد عناصر الامتداد E يساوي q^n .

البرهان :

لتكن المجموعة $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ التي تشكل أساساً للفضاء المتجهي E على F .
عندها يمكن كتابة كل عنصر من E وليكن α بشكل وحيد بالشكل :

$$\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n ; b_i \in F$$

بما أنه توجد q طريقة لاختيار العناصر $b_i \in F$ ، وبالتالي يوجد q^n طريقة لاختيار جميع العناصر b_i ، وبالتالي ، فإن عدد عناصر الامتداد E يساوي q^n .

ينتج من المبرهنة السابقة ، النتيجة التالية :

نتيجة (3) :

إذا كان E حقلاً منتهياً مميزه P ، عندئذٍ E تحتوي على P^n عنصر ، حيث n عدد صحيح موجب .

البرهان :

نعلم أن كل حقل منته وليكن E هو امتداد منته لحقل أولي يتماثل مع الحقل $Z_p = F$ ، حيث P عدد أولي وهو مميز الحقل E ، وبالتالي فحسب المبرهنة السابقة يكون عدد عناصر E هو P^n .

تعريف (12) حقل جالوا Galois field :

إذا كان P عدداً أولياً ، و n عدداً صحيحاً موجباً ، نسمي الحقل الذي عدد عناصره P^n بحقل جالوا من المرتبة P^n ، نرمز له عادةً بـ $GF(P^n)$.

مثال (20) :

إن $GF(P) = Z_p$ ، حيث أن P عدد أولي .

مبرهنة (10) :

إن عدد جذور كثيرة الحدود $f(x) = x^{P^n} - x \in Z_p[x]$ في حقل الانشطار E على الحقل Z_p تكون مختلفة ، وتشكل حقلاً انشطاريّاً لكثيرة الحدود $f(x)$ عدد عناصره P^n ، حيث P عدد أولي و n عدد صحيح موجب .

البرهان :

لدينا $f(x) = x^{P^n} - x \in Z_p[x]$ ، وبالتالي فإن : $f'(x) = P^n \cdot x^{P^n-1} - 1 \neq 0$ ، وبالتالي فإن كثيرة الحدود $f(x)$ لا تحوي جذوراً مضاعفة (علل ذلك) . أي أن لـ $f(x)$ ، n جذراً مختلفاً . لنثبت أن هذه الجذور تشكل حقلاً انشطاريّاً لـ $f(x)$ على الحقل Z_p .

بفرض أن a و $b \neq 0$ جذوراً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، وبالتالي ، يكون :

$$(a \pm b)^{P^n} = a^{P^n} + b^{P^n} = a \pm b$$

$$(a \cdot b^{-1})^{P^n} = a^{P^n} (b^{P^n})^{-1} = a \cdot b^{-1}$$

وبالتالي فإن مجموعة الجذور لكثيرة الحدود $f(x)$ تشكل حقلاً جزئياً من حقل الانشطار ، كما أن كثيرة الحدود $f(x)$ تحوي الحقل Z_p ويحوي P^n جذراً مختلفاً ، وهذا يعني أن هذا الحقل يتطابق مع حقل انشطار كثيرة الحدود $f(x)$.

مبرهنة (11) :

الشرط اللازم والكافي ، لكي يكون الحقل المنتهي E والذي رتبته P^n حقلاً جزئياً رتبته P^m هو أن يكون m/n ، حيث P عدد أولي ، m, n أعداد صحيحة موجبة .

البرهان :

لنبرهن أولاً أن $E \supseteq F$ ، حيث $|F| = P^m$.

بما أن m/n ، فإن $n = m \cdot r$ ، وبما أن :

$$y^r - 1 = (y - 1)(y^{r-1} + y^{r-2} + \dots + y + 1) \Rightarrow P^m - 1 \mid P^n - 1$$

ولنفرض أن $y = P^m$ ، فيكون لدينا :

$$P^n - 1 = (P^m - 1) \cdot q \Rightarrow x^{P^m-1} - 1 / x^{P^n-1} - 1$$

إذن $x^{P^m-1} - x / x^{P^n-1} - x$ ، وبما أن E حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x) = x^{P^n} - x$ من $Z_p[x]$ ، فهو يحوي على جميع جذور كثيرة الحدود

أي أن الحقل E يحوي حقل انشطار $g(x) = x^p - x \in Z_p[x]$ على الحقل Z_p ، حيث $E \supseteq F$ وبالتالي P^m . وبالتالي $|F| = P^m$.

برهان العكس :

ليكن $E \supseteq F$ ، وحيث أن $|F| = P^m$ ، عندئذ يمكن اعتبار الحقل E كفضاء متجهي على F ، بعده منته ويساوي r ، وبالتالي يكون :

$$n = [E : Z_p] = [E : F] \cdot [F : Z_p] = m \cdot r$$

وهذا يعني أن m/n .

مثال (21) :

إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، رتبته P^{20} ، أوجد رتب الحقل الجزئية الفعلية في الحقل F .

الحل :

نلاحظ أن قواسم العدد 20 التي تحدد الحقل الجزئية في الحقل F هي $1, 2, 4, 5, 10$ ، وبالتالي فإن رتب الحقل الجزئية المطلوبة هي : P, P^2, P^4, P^5, P^{10} .

مثال (22) :

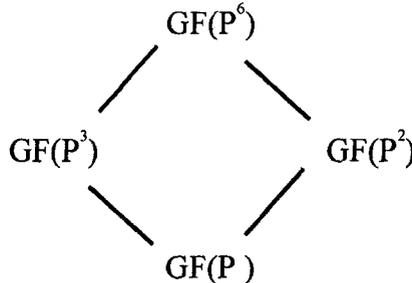
ارسم المخطط الشبكي للحقول الجزئية من حقل جالوا رتبته P^6 .

الحل :

إن الحقول الجزئية من الحقل $GF(P^6)$ هي التالية :

$$Z_p = GF(P^1), GF(P^2), GF(P^3), GF(P^6)$$

وبالتالي فإن المخطط الشبكي لهذه الحقول الجزئية هو :



مبرهنة (12) :

إذا كان E حقلاً منتهياً ، عندها توجد كثيرة حدود غير قابلة للتحليل ولتكن $f(x)$ من $F[x]$ من الدرجة n على الحقل E .

البرهان :

إذا كان الحقل K امتداداً للحقل E درجته n ، فإن $K = E(u)$ ، حيث $u \in K$ ، لأن K امتداد منته للحقل E و $u \in K$ عنصر جبري على الحقل E ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود صغرى للعنصر u على الحقل F ، عندها يكون :

$$\deg f = [E(u) : E]$$

وبما أن $K = E(u)$ و $[K : E] = n$ ، فإن كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل على F ودرجتها تساوي n .

(6-6) الامتداد القابل للفصل Separable extension :

لنعرف أولاً كثيرة الحدود القابلة للفصل .

لتكن $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود من الدرجة n ، على الحقل F ، إذا كانت $f(x)$ غير قابلة للتحليل، عندها نقول إن كثيرة الحدود $f(x)$ قابلة للفصل على الحقل F إذا كانت جميع جذورها بسيطة، أي أن $f(x)$ تكتب في أي حقل انشطار E بالشكل:

$$f(x) = a (x - u_1) (x - u_2) \dots (x - u_n)$$

حيث أن : $a \in F$, $(i = 1, 2, \dots, n)$; $u_i \in E$, $i \neq j$; $u_i \neq u_j$

ملاحظة (5) :

كل كثيرة حدود على حقل مميزه يساوي الصفر تكون قابلة للفصل .

مثال (23) :

إن كثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ قابلة للفصل على الحقل \mathbb{Q} .

الحل :

نلاحظ أولاً أن $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على الحقل \mathbb{Q} ، وجذورها

تنتهي إلى الحقل C وهي $\pm\sqrt{5}i$. وبالتالي حسب التعريف السابق نجد أن $f(x) = x^2 + 5$ كثيرة حدود قابلة للفصل على Q .

لنقدم الآن مفهوم العنصر القابل للفصل والمتعلق بمفهوم الامتداد القابل للفصل.

تعريف (13) العنصر القابل للفصل Separable element :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، وإذا كان $u \in E$ عنصراً جبرياً على الحقل F ، نقول إن u عنصر قابل للفصل على الحقل F ، إذا كانت كثيرة حدوده الصغرى قابلة للفصل على الحقل F .

تعريف (14) الامتداد القابل للفصل Separable extension :

نقول عن الامتداد الجبري E للحقل F إنه امتداد قابل للفصل، إذا كان كل عنصر من عناصر الحقل E قابلاً للفصل على الحقل F .

مبرهنة (13) :

إذا كان E امتداداً منتهياً للحقل F ، وكان K امتداداً منتهياً للحقل E ، عندئذ يكون K امتداداً قابلاً للفصل للحقل F ، إذا، و فقط إذا، كان K امتداداً قابلاً للفصل للحقل E ، وكذلك كان E قابلاً للفصل للحقل F .

(تقبل بدون برهان).

نتيجة (4) :

الشرط اللازم والكافي، لكي تكون كثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$ قابلة للفصل، هو أن يكون القاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $f'(x)$ يساوي الواحد في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$.

البرهان :

لنبرهن أولاً أن كثيرة الحدود $f(x)$ قابلة للفصل على الحقل F .

نفرض العكس، أي لنفرض أن $f(x)$ غير قابلة للفصل على الحقل F ، وهذا يعني أنه يوجد جذر وليكن α لـ $f(x)$ رتبة تضاعفه $m > 1$ ، أي :

$f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x)$ ، ومنه يكون :

$$f'(x) = (x - \alpha)^{m-1} \cdot [m \cdot g(x) + (x - \alpha) g'(x)]$$

نلاحظ أن العامل $(x - \alpha)^{m-1} \neq 1$ قاسماً مشتركاً لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $f'(x)$ ، وهذا يناقض الفرض . إذن $f(x)$ كثيرة حدود قابلة للفصل على الحقل F .

لنبرهن العكس :

إذا كان E حقلاً انشطارياً لكثيرة الحدود $f(x)$ من $F[x]$ ، وبفرض أن $f(x)$ قابلة للفصل على الحقل F ، عندئذ يكون :

$$f(x) = a (x - u_1) (x - u_2) \dots (x - u_n)$$

حيث أن u_i هي جميع جذور كثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل F و $a \in F$.
نفرض الآن أن $d \neq 1$ (القاسم المشترك الأعظم لـ $f(x)$ و $f'(x)$) وهذا يعني أنه يوجد عامل مشترك وليكن $(x - u_i)$ لكل منهما ، أي أن :

$$f(x) = (x - u_i) g(x)$$

$$f'(x) = (x - u_i) h(x)$$

و

من ناحية ثانية ، لدينا :

$$f'(x) = g(x) + (x - u_i) g'(x)$$

ومنه يكون :

$$g(x) = (x - u_i) [h(x) - g'(x)]$$

أي أن $g(u_i) = 0$ ، وهذا يعني أن الجذر u_i ليس بسيطاً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، وهذا يناقض فرضنا أن $f(x)$ كثيرة حدود قابلة للفصل على الحقل F . إذن القاسم المشترك الأعظم d لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $f'(x)$ يساوي الواحد .

(7-6) الحقول التامة Perfect fields :

ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، نقول إن الحقل F حقلاً تاماً إذا كان كل امتداد له هو امتداد قابل للفصل .

مبرهنة (14) :

كل حقل مميزه معدوم هو حقل تام .

لبرهان هذه المبرهنة ، نستخدم الحقيقة الجبرية التالية :
 إذا كان \bar{F} حقلاً الإغلاق الجبري للحقل F ، وإذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود واحدة
 على الحقل \bar{F} حيث $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \in \bar{F}[x]$ ، $a_i \in \bar{F}$ ، وإذا كانت
 $(f(x))^m \in F[x]$ ، وكان $m.1 \neq 0$ في الحقل F ، عندئذ يكون $f(x) \in F[x]$
 أي أن جميع العناصر a_i من F .
 نبرهن بطريقة الاستنتاج الرياضي .
 لنبرهن الآن على المبرهنة السابقة :

إذا كان E امتداداً للحقل F ، الذي مميزه معدوم ، ولنفرض أن $u \in E$. إن كثيرة
 الحدود $f(x)$ غير القابلة للتحليل على الحقل F تتحلل في الحلقة $\bar{F}[x]$ ، بالشكل :
 $\prod_i (x - u_i)^m$ ، حيث أن u_i جذور مختلفة لكثيرة الحدود $f(x)$ ، لنأخذ $u = u_i$ ،
 وبالتالي يكون :

$$f(x) = \left(\prod_i (x - u_i)^m \right)$$

وبما أن $m.1 \neq 0$ في الحقل F الذي مميزه معدوم . فحسب الحقيقة السابقة يكون
 $\left(\prod_i (x - u_i)^m \right)$ من $F[x]$. وبما أن كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل ،
 ودرجتها أصغر ما يمكن في الحلقة $F[x]$ وصفرها هو u ، فنجد أن $m = 1$ ،
 وبالتالي ، فإن العنصر u قابل للفصل على الحقل F ، من أجل $u \in E$ ، وهذا يعني
 أن E هو امتداد قابل للفصل على الحقل F .

نتيجة (5) :

كل حقل منته هو حقل تام .

لندرس أخيراً الامتدادات الناعمة .

(8-6) الامتداد الناعمة Normal extension :

تعريف (15) :

لتكن E امتداداً للحقل F ، نقول إن الامتداد E للحقل F ناعماً . إذا وُجدَ من

أجل أي كثيرة حدود $f(x) \in F[x]$ غير قابلة للتحليل على الحقل F ، جذراً واحداً على الأقل في الحقل E ، أي أن $f(x)$ تنشط في الحقل E .
 من التعريف السابق ، نجد أن الامتداد C (حقل الأعداد المركبة) للحقل R (حقل الأعداد الحقيقية) ناظمي ، لأن كل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في R تنشط في الحقل C .

ملاحظة (6) :

توجد امتدادات ليست ناظرية ، فعلى سبيل المثال ، ليكن الامتداد $Q(a)$ للحقل Q ، حيث $a = \sqrt[3]{5}$. نلاحظ أن كثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 5 \in Q[x]$ غير قابلة للتحليل على الحقل Q ، وجذرها هو $\sqrt[3]{5}$ في الحقل $Q(\sqrt[3]{5})$ ، لكن لا تنشط في الحقل $Q(\sqrt[3]{5})$ ، لأنها لو انشطرت في الحقل $Q(\sqrt[3]{5})$ لوجدنا ثلاثة جذور حقيقية مختلفة للعدد 2 ، وهذا مستحيل .

إذن الامتداد $Q(\sqrt[3]{5})$ للحقل Q غير ناظمي .

مثال (24) :

بين أن الامتداد $Q(\sqrt{-2})$ للحقل Q ناظمي .

الحل :

نلاحظ أولاً أن $a = \sqrt{-2}$ جذر لكثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 2 \in Q[x]$ وهي غير قابلة للتحليل على الحقل Q في الحقل $Q(\sqrt{-2})$ ، كما أن كثيرة الحدود $x^2 + 2$ تنشط في الحقل $Q(\sqrt{-2})$. إذن الامتداد $Q(\sqrt{-2})$ للحقل Q ناظمي .

مبرهنة (15) :

إذا كان E امتداداً جبرياً للحقل F محتوي في \bar{F} (الإغلاق الجبري للحقل F) عندها العبارات التالية متكافئة :

(1) كل كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في $F[x]$ والتي لها جذراً في الحقل E تنشط إلى عوامل خطية .

(2) إن الحقل E هو حقل انشطار لأسرة من كثيرات الحدود في $F[x]$.

(3) إذا كان التطبيق φ يغمر E في \bar{F} ويبقى عناصر الحقل F ثابتة فإن φ تطبيق من E على \bar{E} ، ويمكن عدّه تماثلاً ذاتياً على الحقل E .
البرهان :

$$(1) \Rightarrow (2)$$

لنفرض أن $u \in E$ ، ولتكن $m = m(x)$ كثيرة حدود صغيرة للعنصر u على الحقل F ، فحسب (1) نجد أن m تنشط إلى عوامل خطية في الحقل E ، وهذا يعني أن E حقل انشطار لأسرة كثيرات الحدود m_i للعناصر $u_i \in E$.

$$(2) \Rightarrow (3)$$

لتكن $f_i(x) \in F[x]$ أسرة من كثيرات الحدود ، حيث أن الحقل E هو حقل انشطارها ، $i \in I$ ، وإذا كان u جذراً لبعض كثيرات الحدود $f_i(x)$ في الحقل E ، عندها يمكن غمر E في \bar{F} وفق التطبيق φ ويبقى عناصر الحقل F ثابتة ، وبالتالي يكون $\varphi(u)$ جذر لكثيرة الحدود $f_i(x)$. من ناحية ثانية ، بما أن الامتداد E يُؤلّد بجميع جذور كثيرات الحدود ، وبالتالي ، فإن التطبيق φ تطبيقاً من E إلى F ، أي أن φ تماثلاً ذاتياً .

$$(3) \Rightarrow (1)$$

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على الحقل F ، ولها جذراً $u \in E$ ، وبفرض أن $v \in \bar{E}$ جذراً آخر لكثيرة الحدود $f(x)$ ، ولنثبت أن $v \in E$.
بما أن u, v جذرين لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فيكون :

$$F(u) \cong F[x]/\langle g(x) \rangle \cong F(v)$$

لنرمز بـ $\varphi: F(u) \longrightarrow F(v)$ للتماثل المعرف سابقاً، عندها يكون : $\varphi(u) = v$ ، ولدينا $\varphi(u) = u$ لكل u من F ، إذن التماثل φ يمتد إلى التطبيق $\bar{\varphi}: E \longrightarrow \bar{F}$ ، والذي يغمر الحقل E في \bar{F} ، وبحسب (3) يكون φ_1 تماثل ذاتي على E ، إذن :
 $\varphi_1(u) = \varphi(u) = v \in E$

مبرهنة (16) :

ليكن E امتداداً ناظماً ومنتهياً للحقل F ، عندئذٍ يكون الحقل E انشطارياً لكثيرة حدود على الحقل F .

البرهان :

بما أن E امتداد ناظمي ومنتهي للحقل F ، فيكون : $E = F(u_1, u_2, \dots, u_r)$ حيث أن u_i عناصر جبرية على الحقل F و $1 \leq i \leq r$ ، وبفرض أن كثيرات $m_i(x)$ حدود صفري للعنصر u_i على الحقل F حيث $1 \leq i \leq r$. وإذا كان $f(x) = m_1(x) \cdot m_2(x) \cdot \dots \cdot m_r(x)$ ، وبما أن كثيرات الحدود $m_i(x)$ غير قابلة للتحليل على الحقل F وجذورها في الحقل E ، فإن جميع كثيرات الحدود $m_i(x)$ تنتشر على الحقل E ، أي أن $f(x)$ تنتشر أيضاً على الحقل E ، وبسبب أن الحقل E يتكون من الحقل F وجذور كثيرة الحدود $f(x)$ ، إذن (فحسب تعريف حقل الانشطار) E هو حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل F .

الفصل السابع

الحلقات الارتينية والنوثرية

*Artinian and
Noetherian Rings*

الفصل السابع

الحلقات الارتينية والنوثرية

Artinian and Noetherian Rings

لندرس أخيراً نوعين من أهم أنواع الحلقات ، لكثرة تطبيقاتهما في الهندسة الجبرية ، وفي علوم جبرية أخرى . يطلق على إحداها الحلقات الارتينية نسبة للرياضي الألماني إميل أرتين ، ويطلق على الثانية الحلقات النوثرية ، نسبة للرياضية الألمانية إيمي نوثر .

(1-7) تعاريف :

1- الحلقة الارتينية Artinian Ring :

نقول عن حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، إنها تحقق خاصية السلسلة التناقصية descending chain condition (d.c.c) للمثاليات I ، إذا كان لأي سلسلة متناقصة من المثاليات $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ في R ، يوجد عدد صحيح موجب $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث يتحقق $I_m = I_n$ ، لكل $m \geq n$.

ونقول عن حلقة $(R, +, \cdot)$. إنها ارتينية ، إذا حققت خاصية السلسلة التناقصية للمثاليات السابقة .

2- الحلقة النوثرية Noetherian Ring :

نقول عن حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، إنها تحقق خاصية السلسلة التصاعدية (المتزايدة) ascending chain condition (a.c.c) للمثاليات I_i ، إذا كان لأي سلسلة متصاعدة من المثاليات $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ في R ، يوجد عدد صحيح موجب $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث يتحقق $I_m = I_n$ لكل $m \geq n$.

3- الخاصية العظمى Maximum condition :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، نقول عن هذه الحلقة ، إنها تحقق الخاصية العظمى

من المثاليات في $(Z, +, \cdot)$.
 $\langle 2 \rangle \supset \langle 4 \rangle \supset \dots \supset \langle 2^n \rangle \supset \dots$ ، لكل $n \in Z^+$ تناقصية وغير منتهية

(4) الحلقة المعرفة بالشكل :

$$R = \left\{ a = \frac{m}{p^n} : 0 < a < 1 , P \text{ عدد أولي} \right\}$$

حيث أن $a \cdot b = 0$ ، لكل a, b من R و m من Z^+ ، هي حلقة ارتينية ، لأن كل مثالية في R هي من الشكل :

$$I_r = \left\{ \frac{1}{p^r}, \frac{2}{p^r}, \dots, \frac{p^r - 1}{p^r} \right\} , |I_r| < \infty$$

وهذا يعني أن الحلقة R ، تحقق خاصة السلسلة التناقصية .

(5) لتكن الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، وإذا كان P عدداً أولياً ، فإن $I = \langle P \rangle$ مثالية غير قابلة للتحليل في الحلقة Z ، لأنه إذا كانت $I = J \cap K$ ، فإن $I \subseteq J$ و $I \subseteq K$. لكن I مثالية أعظمية في الحلقة Z ، إذن $I = J$ و $I = K$.

لنقدم الآن بعض الخصائص للحلقتين الارتينية والنوثرية ، من خلال المبرهنات والنتائج التالية :

(3-7) بعض خصائص (صفات) للحلقتين الارتينية والنوثرية :

مبرهنة (1) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، تكون $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية إذا ، وفقط إذا ، كان $R \in \text{min} \langle \rangle$.

البرهان :

نفرض أولاً ، أن $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ سلسلة تناقصية من المثاليات I_i على الحلقة R ، ولتكن $K = \{I_i : i = 1, 2, \dots\}$ مجموعة من المثاليات . إن $K \neq \emptyset$ ، وعليه فإن للمجموعة K عنصراً أصغري ، وليكن I_n .

والآن $I_m = I_n$ ، لكل $m \geq n$ ، فإذا كان $I_m \neq I_n$ ، فإن $I_m \notin K$ وهذا غير ممكن .

إذن $I_m = I_n$ لكل $m \geq n$ ، إذن حلقة ارتينية .

لنبرهن العكس :

نفرض أن K مجموعة غير خالية من مثاليات R ولتكن $I_1 \in K$. إذا كان I عنصراً ليس أصغرياً في S ، فيمكننا إيجاد مثالية ولتكن I_2 من K بحيث $I_1 \supset I_2$. وإذا فرضنا عدم وجود عنصر أصغر في K ، فيمكننا إعادة ما سبق مرة ثانية وبالتالي نحصل على سلسلة متناقصة غير منتهية $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ من المثاليات في الحلقة R ، وهذا يناقض كون R حلقة ارتينية . إذن لأي مجموعة غير خالية من المثاليات في R ، يوجد عنصر أصغر ، أي $R \in \text{min}$.

مبرهنة (2) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، عندئذ العبارات الآتية متكافئة :

(1) $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية .

(2) كل مثالية في الحلقة R ذات مولدات منتهية .

(3) لكل مجموعة غير خالية من المثاليات في الحلقة R يوجد عنصر أعظم .

البرهان :

(2) \Leftrightarrow (1)

لتكن $I \triangleleft R$ ، ولنفرض أن $a_1 \in I$. إذا كانت $\langle a_1 \rangle \neq I$ ، عندها يوجد $a_2 \in I$ ، بحيث يكون $\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle$ ، وبالتالي يكون $\langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، بحيث يكون $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subsetneq I$ ، عندئذ ، يوجد $a_3 \in I$ ، بحيث يكون $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subsetneq I$ ، وهكذا يكون :

$$\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

وبتكرار ما سبق ، حتى نحصل على سلسلة من المثاليات في R التالية :

$$\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subsetneq \dots$$

وبما أن R نوثرية ، يوجد n من Z^+ بحيث $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ، لكل $m \geq n$ ، وعليه يكون $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. إذن I مثالية ذات مولدات

منتهية.

$$(3) \Leftrightarrow (2)$$

لتكن K مجموعة غير خالية من مثاليات في R ، وبفرض أن $I_1 \in K$ ليس
عصراً أعظماً . أي أن $I_2 \in K$ ، فإذا كان I_2 عنصراً غير أعظم في K ،
فيوجد $I_3 \in K$ بحيث يكون $I_2 \subset I_3$ ، وإذا فرضنا عدم وجود عنصراً أعظم في K ،
فيمكننا إيجاد سلسلة غير منتهية $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ من المثاليات في R .

بما أن $I = \bigcup_i I_i \triangleleft R$ ، لأن لكل y, x من I ولكل r من R ، نجد أن $x, y \in I_r$ أو
أن $x, y \in I_K$ ، لأن $I_r \subset I_K$ أو $I_K \subset I_r$ ، وبالتالي ، فإن $r.x$ و $x-y$ ينتميان إلى
نفس المثالية ، وبالتالي يكون : $x-y$ و $r.x \in I = \bigcup_i I_i$. لكن I ذات مولدات منتهية
(فرضاً) ، إذن يوجد $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ ، حيث أن $I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ، وبالتالي
يوجد $m \geq 1$ بحيث يكون : $a_1, a_2, \dots, a_n \in I_m$.

لكن $I_m \subset I = \bigcup_i I_i$ و I هي أصغر مثالية تحوي a_1, a_2, \dots, a_n ، إذن $I_m = I$ ،
وعليه ، فإن : $I_m = I_{m+1} = \dots$ وهذا يناقض وجود سلسلة غير منتهية من
المثاليات في K . إذن يجب أن تحوي K عنصر أعظم .

$$(1) \Leftrightarrow (3)$$

لتكن $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ سلسلة تصاعدية من المثاليات في R ، وبالتالي ،
للمجموعة $K = \{I_1, I_2, \dots\}$ ، عنصر أعظم مثل I_n (حسب (3)) وبالتالي
فإن : $I_m = I_n$ لكل $m \geq n$ ، إذن R حلقة نوثرية .

مبرهنة (3) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد ، عندئذٍ ، R حلقة نوثرية إذا ، فقط
إذا ، كانت كل مثالية أولية في R ذات مولدات منتهية .

البرهان :

لنفرض أولاً أن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، ولنبرهن على تحقق الشرط الوارد في

المبرهنة .

بما أن R حلقة نوثيرية ، فإن أي مثالية فيها هي ذات مولدات منتهية ، حسب المبرهنة السابقة ، وعليه ، فإن أي مثالية أولية في R ذات مولدات منتهية .

لنبرهن العكس :

لنفرض جدلاً أن R حلقة ليست نوثيرية. ولنفرض أن كل مثالية أولية في R ذات مولدات منتهية، ولتكن K مجموعة جميع المثاليات في R ذات المولدات غير المنتهية ، وبالتالي يكون $K \neq \emptyset$ ، وعليه فإن للمجموعة عنصر أعظم وليكن I (حسب مبدأ زورن) ، إذن I مثالية ليست أولية في R ، وبالتالي يوجد $x, y \notin I$ ، بينما $x \cdot y \in I$. وبما أن $I \subset \langle I, y \rangle$ و $I \subset I : \langle y \rangle$ و $x \in I : \langle y \rangle$ ، كما أن I عنصر أعظم في K ، إذن كل من $\langle I, y \rangle$ و $I : \langle y \rangle$ مثالية ذات مولدات منتهية ، وعليه ، إذا كانت :

$$I : \langle y \rangle = \langle d_1, \dots, d_m \rangle \quad \text{و} \quad \langle I, y \rangle = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$$

فإن : $c_i = x_i + y r_i$ ، حيث $x_i \in I$ و $r_i \in R$ و $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{إذن} \quad \langle I, y \rangle = \langle x_1, \dots, x_n, y \rangle$$

لتكن $J = \langle x_1, \dots, x_n, y d_1, \dots, y d_m \rangle$ مثالية في R ، إذن $y d_i \in I$ ، لكل i وبالتالي يكون $J \subseteq I$. لكن إذا كان $a \in I$ ، فإن $a \in \langle I, y \rangle$ ، وعليه يكون $a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot t_i + y r$ حيث $t_i, r \in R$. لكن x_i من I لكل i ، إذن $y \cdot r \in I$ ، وعليه

فإن $r \in I : \langle y \rangle$ ، إذن $r = \sum_{j=1}^m d_j \cdot y_j$ ، حيث $y_j \in R$ ، وعليه فإن :

$$a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot t_i + y \sum_{j=1}^m d_j \cdot y_j = \sum_{i=1}^n x_i \cdot t_i + y \sum_{j=1}^m (y d_j) \cdot y_j \in J$$

وبالتالي ، فإن $I \subseteq J$ ، إذن $I = J$ ، وعليه فإن المثالية I ذات مولدات منتهية ، وهذا تناقض كون $I \in K$ ، إذن R حلقة نوثيرية .

مبرهنة (4) :

(a) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية ، وكانت $I \triangleleft R$ ، عندئذٍ : R/I حلقة ارتينية .
 (b) إذا كانت $I \triangleleft R$ ، وكان كل من I و R/I حلقة ارتينية ، فإن R حلقة ارتينية .

البرهان :

(a) ليكن التشاكل الطبيعي : $\Pi: R \longrightarrow R/I = \bar{R}$ ، وإذا كانت $\bar{I}_1 \supseteq \bar{I}_2 \supseteq \dots$ سلسلة متناقصة من المثاليات في \bar{R} ، ولنفرض أن $I_t = \Pi^{-1}(\bar{I}_t)$. إذن $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ ، سلسلة متناقصة من المثاليات في R ، وبما أن R حلقة ارتينية ، فيوجد عدد صحيح موجب وليكن n بحيث يكون $I_m = I_n$ ، لكل $m \geq n$ ، وعليه يكون $\bar{I}_m = \bar{I}_n$ ، لكل $m \geq n$ ، وبالتالي ، فإن R/I حلقة ارتينية .

(b) لنفرض أن $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ سلسلة متناقصة من المثاليات في R ، وبالتالي يكون : $(I_1+I)/I \supseteq (I_2+I)/I \supseteq \dots$ سلسلة متناقصة من المثاليات في R/I و $I_1 \cap I \supseteq I_2 \cap I \supseteq \dots$ و لكن كلاً من R/I و I حلقة ارتينية ، وبالتالي يوجد $s, r \in \mathbb{Z}^+$ ، بحيث يكون :

$$(I_r+I)/I = (I_n+I)/I , I_s \cap I = I_n \cap I$$

لكل $n \geq r$ ، وعليه يكون :

$$I_r + I = I_n + I , I_s \cap I = I_n \cap I$$

لكل $n \geq r$ ، فإذا كان : $m = \max \{t, s\}$ ، نجد أن : $I_m + I = I_n + I$ و $I_m \cap I = I_n \cap I$ ، لكل $m \geq n$. لكن $I_n \subseteq I_m$ ، إذن :

$$I_m = I_m \cap (I_m + I) = I_m \cap (I_n + I) = I_n + (I_m \cap I) = I_n + (I_n \cap I) = I_n$$

إذن تكون $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية .

مبرهنة (5) :

إذا كانت I و R/I حلقة نوثرية ، وكان $I \triangleleft R$ ، فإن R حلقة نوثرية .

البرهان :

لتكن $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ سلسلة متصاعدة من المثاليات في R ، وبالتالي يكون :
 $(I_1+I)/I \subseteq (I_2+I)/I \subseteq \dots$ سلسلة متصاعدة من المثاليات في R/I . لكن R/I حلقة نوثرية ، إذن يوجد عدد صحيح موجب ، وليكن r بحيث يكون
 $(I_r+I)/I = (I_n+I)/I$ ، لكل $n \geq r$ ، وبالتالي يكون : $I_r + I = I_n + I$ ، لكل $n \geq r$ ،
 وحيث أن $I_1 \cap I \subseteq I_2 \cap I \subseteq \dots$ ، وبالتالي يكون :
 $I_s \cap I = I_n \cap I$ ، لكل $n \geq s$ ، فإذا كان : $m = \max \{r,s\}$ ، نجد أن :
 $I_m + I = I_n + I$ و $I_m \cap I = I_n \cap I$ لكل $n \geq m$ ، لكن $I_m \subseteq I_n$ ، إذن :
 $I_n = I_n \cap (I_n + I) = I_n \cap (I_m + I) = I_m + (I_n \cap I) = I_m + (I_m \cap I) = I_m$
 إذن R حلقة نوثرية .

نتيجة (1) :

لنفرض أن R_1, R_2, \dots, R_n حلقات نوثرية ، فإن $R = \sum_{i=1}^n R_i \oplus$ حلقة نوثرية .

البرهان :

بطريقة الاستقراء الرياضي على n ، نبرهن هذه النتيجة . ولنبرهن عليها من أجل $n = 2$.
 إذن $R = R_1 \oplus R_2$ ، وبالتالي يكون : $R/R_1 \cong R_2$. وبما أن R_2 حلقة نوثرية ، إذن R/R_1 حلقة نوثرية ،
 وبما أن R_1 حلقة نوثرية ، إذن R حلقة نوثرية ، حسب المبرهنة السابقة .

المبرهنة التالية ، تعرف باسم المبرهنة الأساسية لهيلبرت ، والتي نقبلها بدون برهان .

مبرهنة (6) Hilberts Basis theorem :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، فإن حلقة كثيرات الحدود $(R[x], +, \cdot)$ هي حلقة نوثرية أيضاً .

نتيجة (2) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، عندئذ تكون $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة نوثرية أيضاً .

وإذا كانت R_1, R_2, \dots, R_n حلقات ارتينية ، فإن $R = \sum_{i=1}^n \oplus R_i$ حلقة ارتينية

(تبرهن هذه النتيجة بطريقة الاستقراء الرياضي على n) .

(4-7) بعض خواص المثاليات في الحلقة النوثرية :

نذكر الطالب الكريم بمفهوم المثالية معدومة القوى (المتلاشية) ، وبمفهوم المثالية شبه المتلاشية ، وجذر جاكسون لحلقة ، والجذر الأولي للحلقة R ، والمثالية الأولية .

نقول عن مثالية I في حلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ إنها معدومة القوى (متلاشية) (Nilpotent ideal) ، إذا وجد عدد صحيح موجب وليكن n بحيث يكون $I^n = 0$ ، حيث 0 هو صفر الحلقة R .

نقول عن المثالية J إنها شبه معدومة القوى (شبه متلاشية) (Nil ideal) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، إذا كان كل عنصر فيها متلاشياً .

أما جذر جاكسون (Jacobson radical) لحلقة ما ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ فيعرف على أنه تقاطع لجميع المثاليات العظمى فيها ، ونرمز له عادةً بـ $J(R)$ أو بـ $\text{Rad}(R)$. إذن :

$$J(R) = \bigcap \{M : M \text{ مثالية عظمى في الحلقة } R\}$$

إذا كان $J(R) = 0$ ، قيل عن الحلقة $(R, +, \cdot)$ إنها حلقة شبه بسيطة (Semi simple ring) .

نعرف الآن الجذر الأولي للمثالية I في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، والذي نرمز له عادةً بـ $\text{rad}(R)$.

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، عندئذ :

$$\text{rad}(R) = \{x \in R : \exists n \in \mathbb{Z}^+ : x^n \in I\}$$

لنعرف أخيراً المثالية الأولية في الحلقة R (Prime ideal) .
 نقول عن مثالية I في حلقة $(R, +, \cdot)$ ، إنها مثالية أولية (Prime ideal) في تلك الحلقة، إذا كان $J \cdot K \subseteq I$ ، حيث J و K مثاليتين في R ، فإن $J \subseteq I$ أو $K \subseteq I$.
 مبرهنة (7) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثيرية ، عندها الجذر الأولي للحلقة $\text{rad}(R)$ هو أكبر مثالية معدومة القوى (متلاشية) في الحلقة R .
 البرهان :

بما أن R حلقة نوثيرية ، عندها توجد مثالية معدومة القوى عظمى ، ولتكن N في R . ولنفرض أن I مثالية معدومة القوى في R ، وإذا كان $N^m = 0$ و $I^n = 0$ فإن $(I + N)^{m+n} = 0$ ، وبالتالي يكون $I + N$ مثالية معدومة القوى في R ، كما أن $N \subseteq I + N$. لكن N مثالية معدومة القوى عظمى في R ، إذن $N = I + N$ ، وبالتالي يكون $I \subseteq N$ ، ومنه يكون N أكبر مثالية معدومة القوى في R . لكن N مثالية شبه معدومة القوى ، إذن $N \subseteq \text{rad}(R)$.

لنثبت أن $\text{rad}(R) \subseteq N$ ، من أجل ذلك نفرض أن $(x + N) \in R/N$ عنصر معدوم القوى، وبالتالي يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ بحيث يكون: $x^m + N = (x + N)^m = N$ ، وبالتالي فإن $x^m \in N$. وبما أن N مثالية شبه معدومة القوى ، إذن يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث يكون $x^{m \cdot n} = (x^m)^n = 0$ وعليه يكون $x \in R$ عنصر معدوم القوى ، ومنه ينتج أن المثالية $\langle x \rangle$ معدومة القوى ، ومنه يكون $\langle x \rangle \subseteq N$ ، إذن N مثالية معدومة القوى عظمى في R . لكن $x \in \langle x \rangle \subseteq N$ ، إذن $x + N = N$ ، ومنه يكون R/N لا تحوي أي عنصر معدوم القوى غير صفري ، وبالتالي $\text{rad}(R/N) = \overline{0}$ ، لكن $\text{rad}(R) = \overline{\text{rad}(R/N)}$ ، إذن $\text{rad}(R) = \overline{0}$ ، ومنه يكون: $\text{rad}(R) \subseteq N$ ، وعليه يكون $\text{rad}(R) = N$.

نتيجة (3) :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، فإن أي مثالية شبه معدومة القوى في R ، هي مثالية معدومة القوى .

البرهان :

لتكن I مثالية شبه معدومة القوى في الحلقة R ، إذن $I \subseteq \text{rad}(R)$ وبما أن $\text{rad}(R)$ مثالية معدومة القوى في R (حسب المبرهنة السابقة) ، إذن I مثالية معدومة القوى في R .

مبرهنة (8) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، فإن أي مثالية في R تحوي حاصل ضرب مثاليات أولية .

البرهان :

لتكن K مجموعة المثاليات في الحلقة النوثرية R ، التي لا تحوي حاصل ضرب مثاليات أولية في R ، ولنفرض أن $K \neq \emptyset$ ، وبالتالي فإن S تحوي عنصر أعظم ، وليكن N ، وبالتالي فإن N مثالية ليست أولية ، وبالتالي توجد مثاليين J, K في R بحيث $J \cdot K \subseteq N$ ، لكن $J \not\subseteq N$ و $K \not\subseteq N$. لكن :

$$(N + J)(N + K) \subseteq N^2 + N \cdot K + J \cdot N + J \cdot K \subseteq N$$

و $N \subset N + K$ و $N \subset N + J$ ، إذن $N + J \not\subseteq K$ و $N + K \in K$ ، وعليه يكون $N + K$ و $N + J$ يحوي حاصل ضرب مثالية أولية في R ، وبالتالي فإن $(N + J)(N + K)$ تحوي حاصل ضرب مثاليات أولية في R ، وعليه فإن N تحوي حاصل ضرب مثاليات أولية في R ، وهذا يناقض كون $N \in K$. إذن $S \neq \emptyset$ ، وعليه ، فإن أي مثالية في R تحوي حاصل ضرب مثاليات أولية في الحلقة R .

مبرهنة (9) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ما ، عندئذ يمكن التعبير عن أي مثالية فعلية ، كتقاطع عدد منتهي من المثاليات غير القابلة للتحليل في الحلقة R .

البرهان :

لنكن K مجموعة جميع المثاليات الفعلية في الحلقة R ، التي لا يمكن التعبير عنها كتقاطع عدد منتهي من المثاليات غير القابلة للتحويل في الحلقة R ، ولنفرض أن $K \neq \phi$. عندئذٍ K تحوي عنصر أعظم وليكن M ، وعليه فإن M مثالية قابلة للتحويل في R ، وهذا يعني ، أنه توجد مثاليتين I و J في R بحيث يكون $M = I \cap J$ ، $M \subset I$ و $M \subset J$ ، وبما أن M عنصر أعظم في K ، فإن $I, J \notin K$ ، وبالتالي يمكن التعبير عن كل منهما كتقاطع عدد منتهي من المثاليات غير القابلة للتحويل في R ، وبالتالي يمكن التعبير عن M كتقاطع عدد منتهي من المثاليات غير القابلة للتحويل في R ، وهذا تناقض . وبالتالي ، فإن $K = \phi$ ، إذن كل مثالية فعلية في الحلقة R ، يمكن التعبير عنها كتقاطع عدد منتهي من المثاليات غير القابلة للتحويل .

تعريف المثالية الابتدائية Primary ideal :

لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ما ، وإذا كان $I \triangleleft R$ ، نقول عن I إنها مثالية ابتدائية في R ، إذا تحقق الشرط التالي :

لكل a و b من R ، وإذا كان $a \cdot b \in I$ و $a \notin I$ ، فإن $b^n \in I$ لبعض قيم n من \mathbb{Z}^+ .

لاحظ أن I مثالية ابتدائية في $R \Leftrightarrow \sqrt{I} = \text{rad}(I)$ ، $(a \cdot b \in I, a \notin I) \Rightarrow b \in \sqrt{I}$ ، وإذا كانت I مثالية أولية في R ، فإن I مثالية ابتدائية في R أيضاً .

مبرهنة (10) :

لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثيرية ، عندها ، يمكن التعبير عن أي مثالية فعلية فيها كتقاطع عدد منتهي من المثاليات الابتدائية .

البرهان :

لنفرض أن I مثالية ليست ابتدائية في الحلقة R ، ولنبرهن أن أي مثالية غير قابلة للتحويل في R هي مثالية ابتدائية . بما أن I مثالية ليست ابتدائية في R ، لذا

يوجد $a, b \in I$ بحيث $a, b \in I$ و $a \in I$ و $b' \in I$ لكل $r \in Z^+$ ، لنكن $I_m = \{x \in R : b^n \cdot x \in I\}$ ، إن $I_m \triangleleft R$ حيث $m \in Z^+$ ، كما أن $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ وبما أن R حلقة نوثرية ، يوجد عدد صحيح موجب n ، بحيث يكون $I_n = I_{n+1} = \dots$ ولنثبت أن : $I = (I + Rb^n) \cap (I + \langle a \rangle)$ ، من أجل ذلك ، إن $I \subseteq (I + Rb^n) \cap (I + \langle a \rangle)$ ، كما أنه ، إذا كان $x \in (I + Rb^n) \cap (I + \langle a \rangle)$ ، فإن : $x = c + yb^n = d + ea + ma$ ، حيث $c, d \in I$ و $y, e \in R$ و $m \in Z$ ، بما أن $a, b \in I$ ، فيكون :

$$bx = bc + b(yb^n) = bd + eab + mab \in I$$

وبما أن $I_n + I_{n+1}$ ، فيكون : $xb^n \in I$ ، ومنه يكون $x \in I$.
 نستنتج مما سبق ، أن $I = (I + Rb^n) \cap (I + \langle a \rangle)$ ، وعليه ، فإن I مثالية قابلة للتحليل في R ، لأن $I \subset (I + \langle a \rangle)$ و $I \subset (I + Rb^n)$.
 إذن كل مثالية غير قابلة للتحليل هي مثالية ابتدائية في R .
 مبرهنة (11) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كانت I, J مثاليين في R ، حيث أن $I \cdot J = I$ ، ولنفرض أن I مثالية ذات مولدات منتهية ، عندئذ يوجد $x \in J$ ، بحيث يكون $(1 - x) \cdot I = 0$.
 البرهان :

لتكن $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ و $I_i = \langle a_i, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$ و $I_{n+1} = 0$. ولنبرهن على وجود العنصر x_i من J ، بطريقة الاستقراء الرياضي على i بحيث يكون $(1 - x_i) \cdot I_i \subseteq I_i$.

إذا كان $i = 1$ و $I_1 = I$ ، وبالتالي يكون : $x_1 = 0$ والعلاقة صحيحة من أجل $i = 1$.
 لنفرض الآن أن $(1 - x_i) \cdot I_i \subseteq I_i$ حيث $x_i \in I$. بما أن $I \subseteq I \cdot J$ فيكون :

$$(1 - x_i) \cdot I \subseteq (1 - x_i) \cdot I \cdot J \subseteq I_i \cdot I$$

وبما أن $a_i \in I_i$ لكل i ، فيكون : $a_i \in I_i$ ، ومنه يكون

حيث أن $b_{ir} \in J$ ، إذن : $(1 - x_i) a_i = \sum_{r=i}^n b_{ir} a_r$

$$(1 - x_i - b_{ir}) a_i \sum_{r=i+1}^n b_{ir} a_r \in I_{i+1}$$

ومنه يكون :

$$(1 - x_i) (1 - x_i - b_{ij}) I \subseteq (1 - x_i - b_{ij}) I \subseteq I_{i+1}$$

نستنتج مما سبق أنه إذا كان :

$$1 - x_{i+1} = (1 - x_i) (1 - x_i - b_{ij})$$

فإن $I \subseteq I_{i+1}$ ، وبالتالي ، فإن العلاقة صحيحة من أجل جميع قيم i .
وإذا كان $x = x_{n+1}$ ، فإن $x \in J$ و $(1 - x) I = 0$.

ينتج من المبرهنة السابقة النتيجة التالية والمسماة بتمهيدية نكياما
. Nakayam's Lemma

نتيجة (4) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ما ، و I مثالية ذات مولدات منتهية فيها ، وإذا كان
. $I \cdot J(R) = I$ ، فإن $I = 0$.

البرهان :

بما أن I مثالية ذات مولدات منتهية في R و $I \cdot J(R) = I$ ، فيوجد $x \in J(R)$ بحيث
يكون $(1 - x) \cdot I = 0$ (حسب المبرهنة السابقة) ، وبالتالي يكون :

$$I \subseteq \text{ann}(1 - x) = \{x \in R : (1 - x)r = 0\}$$

وبما أن $(1 - x)$ قابل للانعكاس ، إذن : $\text{ann}(1 - x) = 0$ ومنه يكون $I = 0$.

نتيجة (5) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثيرية بمحايد ، وإذا كانت I مثالية فعلية في R ، عندئذ :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{r \in R : \exists a \in I : (1 - a)r = 0\}$$

مبرهنة (12) :

بفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية ، عندها يكون $J(R)$ مثالية معدومة القوى

(متلاشية) .

البرهان :

لتكن السلسلة التناقصية من المثاليات في R التالية :

$$J \subseteq J^2 \subseteq \dots ; J = J(R)$$

بما أن R حلقة ارتينية ، يوجد عدد صحيح موجب ، وليكن n بحيث $J^n = J^{n+1} = \dots$.

إذا كان $I = J^n$ ، فإن $I \subseteq J$ و $I^2 = I$. ولنتثبت أن $I = 0$.

من أجل ذلك ، نفرض أن $I \neq 0$

$$K = \{I \triangleleft R : I \subseteq k, k.I \neq 0\}$$

ومنه يكون $k \neq \phi$ ، لأن $I \in K$ ، وعليه فإن K تحوي عنصر أصغر وليكن M .

إذن $M.I \neq 0$ ، ومنه يكون $b \in M$ بحيث $b.I \neq 0$.

إذن : $b.I \neq 0$ ، $(b.I)I = b.I^2 = b.I \neq 0$ و $b.I \subseteq M \subseteq I$ ، ومنه يكون $b.I = M$ (لأن

M عنصر أصغر في K) . وبالتالي يوجد $x \in I$ ، بحيث أن $b.x = b$. وبما أن

$x \in I \subseteq J$ ، إذن $(1-x)$ قابل للانعكاس في الحلقة R ، وبالتالي يوجد $r \in R$

بحيث $(1-x)r = 1$. إذن :

$$b = b(1-x)r = (b-bx)r = 0$$

وهذا يناقض كون $b.I \neq 0$ ، إذن $I = J^n = 0$ ، أي أن J مثالية معدومة القوى في

الحلقة R .

نقدم أخيراً العلاقة بين الحلقة الارتينية والحلقة النوثرية ، من خلال المبرهنات

التالية ، والتي سنقبلها بدون برهان .

(5-7) العلاقة بين الحلقة الارتينية والنوثرية :

مبرهنة (13) :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة محايد ، تكون R حلقة ارتينية ، إذا ، فقط إذا ، كانت R

حلقة نوثرية وكل مثالية أولية فعلية فيها هي مثالية عظمى .

مبرهنة (14) :

بفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، ولتكن I_1, \dots, I_n مثاليات أعظمية في الحلقة R ، حيث $\prod_{i=1}^n I_i = 0$ ، عندئذ تكون R حلقة نوثرية إذا ، فقط إذا ، كانت R حلقة ارتينية .

نستنتج مما سبق ، أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية بمحايد ، فإن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية .

(ب) القسم العملي

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل الأول :

الحلقة والحلقة التامة

*Ring & Integral
domains*

1- تمرينات محلولة للفصل الأول

- الحلقة والحلقة التامة -

(1) لنعرّف على مجموع أزواج الأعداد الصحيحة $Z^2 = Z \times Z$ العمليتين (+) و (\times) بالشكل التالي :

$$(x,y) + (x_1,y_1) = (x + x_1 , y + y_1)$$

$$(x,y) \times (x_1,y_1) = (x x_1 , y y_1 + x y_1 + y x_1)$$

لكل (x,y) و (x_1,y_1) من Z^2 ، المطلوب :

أثبت أن $(Z^2, +, \times)$ حلقة إبدالية ، ثم بيّن فيما إذا كانت هذه الحلقة بمحايد أو حلقة تامة .

الحل :

لنثبت أولاً ، أن $(Z^2, +, \times)$ حلقة إبدالية .

بالاستفادة من أن عملية الجمع على Z تجميعية وإبدالية نجد :

$$\begin{aligned} [(x,y) + (x_1,y_1)] + (x_2,y_2) &= (x + x_1 , y + y_1) + (x_2,y_2) \\ &= [(x + x_1) + x_2 , (y + y_1) + y_2] \\ &= [x + (x_1 + x_2) , y + (y_1 + y_2)] = (x,y) + (x_1+x_2 , y_1+y_2) \\ &= (x,y) + [(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] \end{aligned}$$

أي أن (+) تجميعية على عناصر $(Z^2, +, \times)$.

كما أن :

$$\begin{aligned} (x,y) + (x_1,y_1) &= (x + x_1 , y + y_1) = (x_1 + x , y_1 + y) \\ &= (x_1,y_1) + (x,y) \end{aligned}$$

أي أن العملية (+) إبدالية على عناصر الحلقة $(Z^2, +, \times)$.

إن العنصر $(0,0)$ محايد بالنسبة لعملية الجمع على Z^2 لأنه، إذا كان y,x من Z ،

فإن :

$$(x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y)$$

كذلك ، لكل عنصر معكوس بالنسبة لعملية الجمع على Z^2 ، أي أن لكل عنصر مثل (x,y) معكوس بالنسبة لعملية الجمع $(-x,-y)$ على Z^2 ، لأن :

$$(x,y) + (-x,-y) = (-x,-y) + (x,y) = (0,0)$$

نستنتج مما سبق أن $(Z^2,+)$ زمرة إبدالية .

لنثبت الآن أن عملية (\times) تجميعية على عناصر Z^2 ، ليكن $(x,y), (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ ثلاثة عناصر من Z^2 ، فإن :

$$\begin{aligned} [(x,y) \times (x_1,y_1)] \times (x_2,y_2) &= (xx_1, yy_1 + xy_1 + yx_1) \times (x_2,y_2) \\ &= [(xx_1) x_2, (yy_1 + xy_1 + yx_1) y_2 + (xx_1) y_2 + (yy_1 + xy_1 + yx_1) x_2] \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x,y) \times [(x_1,y_1) \times (x_2,y_2)] &= (x,y) \times (x_1x_2, y_1y_2 + x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= [x(x_1x_2), y(y_1y_2 + x_1y_2 + y_1x_2) + x(y_1y_2 + x_1y_2 + y_1x_2) + y(x_1x_2)] \quad (2) \end{aligned}$$

بمقارنة (1) و (2) نجد أن الخاصية التجميعية بالنسبة لعملية الضرب (\times) محققة في Z^2 .

لنثبت الآن أن عملية الضرب (\times) تقبل التوزيع (توزيعية) بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ في Z^2 :

$$\begin{aligned} (x,y) \times [(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] &= (x,y) \times (x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= [x(x_1+x_2), y(y_1+y_2) + x(y_1+y_2) + y(x_1+x_2)] \\ &= (x x_1 + x x_2, yy_1 + xy_1 + yx_1 + yy_2 + xy_2 + yx_2) \\ &= (x x_1, yy_1 + xy_1 + yx_1) + (x x_2, yy_2 + xy_2 + yx_2) \\ &= (x,y) \times (x_1,y_1) + (x,y) \times (x_2,y_2) \end{aligned}$$

لاحظ في هذا البرهان ، استفدنا من أن خاصية توزيع الضرب على الجمع في الأعداد الصحيحة Z .

نستخلص ، مما سبق أن $(Z^2, +, \times)$ حلقة . ولما كان :

$$\begin{aligned} (x,y) \times (x_1,y_1) &= (xx_1, yy_1 + xy_1 + yx_1) \\ &= (x_1x, y_1y + x_1y + y_1x) = (x_1,y_1) \times (x,y) \end{aligned}$$

إذن هذه الحلقة إبدالية .

لكي تكون الحلقة $(Z^2, +, \times)$ بمحايد ، يلزم ويكفي وجود عنصر وليكن (x, y) من Z^2 بحيث يحقق الشرط من أجل أي b, a من Z ، فإن :

$$(a, b) \times (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (ax, by + ay + bx) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow ax = a, by + ay + bx = b \Rightarrow x = 1, y = 0$$

وبالتالي فإن $(1, 0)$ من Z^2 عنصر محايد للعملية (\times) في الحلقة $(Z^2, +, \times)$. إذن الحلقة $(Z^2, +, \times)$ بمحايد.

لنبيّن أخيراً ، فيما إذا كانت الحلقة $(Z^2, +, \times)$ تامة .

ليكن (x, y) و (u, v) عنصرين ما من Z^2 ، يحققان العلاقة :

$$(x, y) \times (u, v) = (0, 0)$$

إن :

$$(x, y) \times (u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow (xu, yv + xv + yu) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow xu = 0, yv + xv + yu = 0$$

نستنتج من هذا ، أنه إذا كان $u = -v$ و $x = 0$ و y, v أي عددين صحيحين ، فإن علاقتي التساوي السابقتين تكونان محققتين ، وعلى سبيل المثال ، فإن :

$$(0, 1) (2, -2) = (0, 0)$$

إذن الحلقة $(Z^2, +, \times)$ ليست تامة ، لأنها تحتوي على عناصر مغايرة للصفر $(0, 0)$ حاصل ضربها يساوي الصفر ، أي أنها تحتوي على قواسم للصفر .

(2) لنكن X مجموعة غير خالية ، وإذا كانت $P(X)$ مجموعة القوة للمجموعة

X ، وإذا عرفنا العمليتين $(+)$ و (\cdot) على المجموعة $P(X)$ بالشكل :

لكل A, B من $P(X)$ ، يكون :

$$A + B = A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$A \cdot B = B \cap A$$

أثبت أن $(P(X), +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد .

الحل :

من السهولة إثبات أن $(P(X), +)$ زمرة إبدالية ، حيث أن صفرها هو المجموعة

الخالية ، لأن :

$$A + \phi = (A \cup \phi) \setminus (A \cap \phi) = A \setminus \phi = A = \phi + A \in P(X)$$

ومحايد هذه الحلقة هي المجموعة X لأن :

$$A \cap X = X \cap A = A$$

كما أن المجموعة A من $P(X)$ هي المعكوس الجمعي لأن :

$$A + A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \phi$$

ويمكن التحقق من بقية شروط الحلقة .

(3) قَدِّم مثلاً على حلقة ولتكن R بها ثلاثة عناصر غير معدومة ، a, b, c

بحيث يتحقق $a.b = a.c$ ولكن $b \neq c$.

الحل :

بأخذ الحلقة $(Z_{16}, \oplus, \otimes)$ ، ولتكن العناصر هي $[4]$ و $[8]$ ، ولدينا:

$$[4] \otimes [8] = [4] \otimes [4] \neq [8] .$$

(4) إذا كانت S مجموعة جميع التطبيقات الحقيقية على مجموعة الأعداد

الحقيقية هل $(S, +, 0)$ حلقة ، حيث 0 هي عملية تركيب التطبيقات .

الحل :

إن $(S, +, 0)$ ليست حلقة ، لأن عملية تركيب التطبيقات لا يمكن أن تتوزع على

الجمع ، أي :

$$\forall f, g, h \in S : f \circ (g + h) \neq (f \circ g) + (f \circ h)$$

على سبيل المثال، خذ : $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = x^2$ ، $h(x) = x - 2$

(5) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، و $a \in R$ ، ولنفرض أنه يوجد عنصر وحيد

$b \in R$ بحيث $a.b = 1$ ، أثبت أن $b.a = 1$.

الحل :

بما أن $a.b = 1$ ، فإن :

$$a.b.a = 1.a \Rightarrow a.b.a - a = (a.b - 1).a = 0.a = 0$$

وبالتالي يكون :

$$a.b.a - a + a.b = a(b.a - 1 + b) = 1.a.b.a - a + 1 = 1$$

ومنه ، فإن : $a.(b.a - 1 + b) = 1$ ومن وحدانية العنصر b نجد أن : $a.b - 1 = 1$ ، وبالتالي فإن $b.a = 1$.

(6) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد و $a \in R$ ، أثبت أنه ، إذا كان $a^2 = 0$ ، فإن كلاً من $1 + a$ و $1 - a$ عنصر وحدة .

الحل :

$$(1 - a)(1 + a) = 1 - a + a - a^2 = 1 - a^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 - a)(1 + a) = 1 - 0 = 1 \quad \text{وبما أن } a^2 = 0 \text{ ، فإن :}$$

وهذا يبين لنا أن كل من $(1 + a)$ ، $(1 - a)$ عنصر وحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(7) لتكن $(Z_{10}, \oplus, \otimes)$ حلقة الأعداد الصحيحة قياس 10 ، هل العنصران [7]

و [5] عنصرا وحدة فيها ، وبيّن أن $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ تمثل عنصر الوحدة في حلقة

المصفوفات $(M_2(R), +, \cdot)$.

الحل :

إن العنصر [7] هو عنصر وحدة فيها ، لأنه :

$$[7] \otimes [3] = [1] = [3] \otimes [7]$$

بينما نرى أن [5] ليس عنصر وحدة في هذه الحلقة .

أما بالنسبة للمصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ في الحلقة $(M_2(R), +, \cdot)$ فهي تمثل عنصر

الوحدة فيها ، لأن :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

(8) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، ولنرمز لمحايدها بـ 1 ، ولصفرها بـ 0 ،

ولنفرض أن $x^2 = x$ ، مهما يكن x من R ، بيّن أن $R = \{0,1\}$.

الحل :

ليكن a عنصراً من R ، فإن $a^2 = a$ ، وبالتالي ، فإن $a^2 - a = 0$ ، أي أن $a(a-1) = 0$.

وبما أن $(R,+,.)$ حلقة تامة ، فإما أن يكون $a = 0$ أو $a - 1 = 0$ ، أي أن $a = 1$ ، إذن $R = \{0,1\}$.

(9) لتكن الحلقة $(Z_{12},+,.)$ ، حل المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$ في هذه الحلقة.

الحل :

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 , x_2 = 3$$

في الحلقة $(Z_{12},+,.)$ ليس فقط $o.a = a.o = o$ ، بما أن :

$$3.4 = 4.3 = 2.6 = 6.2 = 3.8 = 8.3 = 4 \times 9 = \dots$$

إن العددين 11 و 6 هي أيضاً حلاً للمعادلة ، وبالتالي ، فإن حلول المعادلة في الحلقة المذكورة هي : $\{2,3,6,11\}$

(10) لتكن $(M_2(R),+,.)$ حلقة المصفوفات الحقيقية المربعة من الدرجة

الثانية. بيّن فيما إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ قاسمتين للصفر في

الحلقة المفروضة .

$$. D = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} , C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ أعد الطلب السابق من أجل المصفوفتين}$$

الحل :

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ بما أن :}$$

فإن B, A قاسمتين للصفر في الحلقة المدروسة .

أما بالنسبة للمصفوفتين D, C ، فإننا نلاحظ أولاً أن $C.D \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

نجد أن :

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(11) في حلقة الضرب المباشر $(R \times R, +, \cdot)$ ، بيّن فيما إذا كان كلاً من $(0,3)$ و $(1,0)$ قاسماً للصفر . وفي الحلقة $(Z_{15}, \oplus, \otimes)$ بيّن فيما إذا كان $[5]$ قاسم للصفر فيها .

الحل :

بما أن $(1,0) = (0,0)$ ، هذا يعني أن كلاً من $(0,3)$ و $(1,0)$ قاسم للصفر . وفي الحلقة $(Z_{15}, \oplus, \otimes)$ ، إن العنصر $[5]$ قاسم للصفر فيها ، لأن $[5] \otimes [6] = [0]$ وهذا يعني أيضاً أن $[6]$ هو قاسم للصفر في نفس الحلقة .

(12) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان $e^2 = e$ ، حيث e هو العنصر المحايد فيها بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ ، برهن أن $1 - 2e$ هو عنصر الوحدة .

الحل :

$$(1 - 2e)^2 = 1 - 4e + 4e^2 = 1 - 4e + 4e = 1 \quad \text{لدينا :}$$

(13) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان $a, b \in R$ ، فإنه لكل عدد صحيح موجب n ، يتحقق ما يلي :

$$(a + b)^n = a^n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i \right) + b^n \quad (*)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \text{حيث أن :}$$

البرهان :

من الواضح أن العلاقة (*) صحيحة من أجل $n = 1$.
 لنفرض أن العلاقة (*) صحيحة من أجل $n > 1$ ، ولنبرهن على صحتها من أجل $n + 1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b)^n \cdot (a + b) \\ &= a^n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i + b^n \right) (a + b) \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + a^n \cdot b + a \cdot b^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^{i+1}\end{aligned}$$

ولكن :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i &= n \cdot a^n \cdot b + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i \\ \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^{i+1} &= n \cdot a \cdot b^n + \sum_{i=1}^{n-2} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^{i+1} \\ &= n \cdot a \cdot b^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i-1} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i\end{aligned}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + (n+1) a^n \cdot b + (n+1) a \cdot b^n + \\ &\quad \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \cdot a^{n-i+1} \cdot b^i\end{aligned}$$

وبملاحظة أن :

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i} \quad \& \quad \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n} = n+1$$

نجد :

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} \cdot a^{n+1-i} \cdot b^i \right) + b^{n+1}$$

إن العلاقة (*) صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب $n > 1$.

(14) لتكن $(M_2(Z_3), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية على

Z_3 . حدّد مميز هذه الحلقة .

الحل :

إن $\text{Char } M_2(\mathbb{Z}_3) = 3$ ، لأن العدد 3 هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $3.A = 0$ ، حيث أن $A \in M_2(\mathbb{Z}_3)$. إن $\text{Char } M_2(\mathbb{Z}) = 0$ ، لأنه لا يوجد عدد صحيح موجب n يحقق العلاقة $n.A = 0$ حيث أن $A \in M_2(\mathbb{Z})$.

(15) لتكن $H = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i \in \mathbb{R} ; i = 1, 2, 3, 4\}$. ولنعرّف عمليتي

الجمع والضرب على المجموعة H بالشكل :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4, a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3, a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_2 b_4, a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)$$

إن $(H, +, \cdot)$ حلقة بمحايد حيث $(0, 0, 0, 0)$ هو المحايد بالنسبة لعملية الجمع ، كما أن معكوس العنصر (a_1, a_2, a_3, a_4) هو $(-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$. أما محايدها بالنسبة لعملية الضرب فهو $(1, 0, 0, 0)$.

وإذا كان $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in H$ عنصراً غير صفري ، فإن :

$$N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \neq 0 , N \in \mathbb{R}$$

إن $\left(\frac{a_1}{N}, \frac{a_2}{N}, \frac{a_3}{N}, \frac{a_4}{N}\right)$ ، ومن السهل التأكد من أن :

هو المعكوس الضربي للعنصر (a_1, a_2, a_3, a_4) من $\left(\frac{-a_1}{N}, \frac{-a_2}{N}, \frac{-a_3}{N}, \frac{-a_4}{N}\right)$

H . لذلك فإن H حلقة قاسمية . أو حقل متخالف .

ملاحظة :

الحلقة الأخيرة تسمى بحلقة الرباعيات الحقيقية (Real quaternions) أما الحرف

H نسبة إلى الرياضي الذي عرفها وهو هاملتون .

(16) أثبت أن حلقة الرباعيات الحقيقية لا تشكل حقلاً .

الحل :

لكي تشكل حلقة الرباعيات الحقيقية حقلاً يجب أن تكون إبدالية .

إن عملية الضرب ليست إبدالية ، فعلى سبيل المثال :

$$(0,1,0,0) (0,0,1,0) = (0,0,0,1)$$

$$(0,0,1,0) (0,1,0,0) = (0,0,0,-1)$$

أي أن : $(0,0,0,1) \neq (0,0,0,-1)$

(17) أثبت أن حقل مؤلف من تسعة عناصر .

الحل :

بما أن : $Z_3 = \{0,1,2\}$ ، وبالتالي ، فإن :

$$Z_3(i) = \{0, 1, 2, i, 2i, 1+i, 1+2i, 2+i, 2+2i\}$$

من أجل أي $a = r + s i$ من $Z_3(i)$ حيث s, r من R ، نكتب : $\bar{a} = r - si$ ،
وبالتالي يكون لدينا $\bar{a} \bar{a} = r^2 + s^2 \in Z_3(i)$.

إذا كان $a \neq 0$ ، فإن $r \neq 0$ أو $s \neq 0$ وهذا يؤدي إلى أن $r^2 + s^2 \neq 0$ في $Z_3(i)$
(في الحقيقة $r^2 = 0$ أو $r^2 = 1$ من أجل r من $Z_3(i)$) . وهكذا ، كما في C
 $\bar{a}^{-1} = (r^2 + s^2)^{-1} a^{-1}$ في $Z_3(i)$.

(18) لتكن $(R,+, \cdot)$ حلقة بول ، وإذا كانت الحلقة $(R,+, \cdot)$ تملك عنصران على

الأقل ، فإن هذه الحلقة تملك قواسم للصفر .

الحل :

من الفرض يوجد $a, b \in R$ حيث $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $a \neq b$.

$$a^2 b - a b^2 = a b - a b = 0 \quad \text{لكن :}$$

$$\Rightarrow a (a - b) b = 0$$

فإذا كان $(a - b) b \neq 0$ ، فإن a قاسم للصفر في الحلقة $(R,+, \cdot)$ ، وإذا كان
 $(a - b) b = 0$ ، فإن b قاسم للصفر ، لأن $a \neq b$ فرضاً أي أن $a - b \neq 0$.
وبذلك يتم المطلوب .

(19) ليكن (F, T, \star) حقلاً ما ، ولنرمز لعنصر الوحدة فيه بالرمز 1 ،

ولصفرة بالرمز 0 ، ولتكن :

$$M = \{x \in F : x = n.e ; n \in \mathbb{Z}\}$$

وليكن للحقل (F, T, \star) مميز $P \neq 0$. أثبت أنه إذا كان $y \neq 0$ عنصراً ما من M ، فإن y معكوساً في M بالنسبة للعملية \star .

الحل :

إذا كان $y \neq 0$ عنصراً من M ، فإنه يمكن كتابته بالشكل : $y = m.e ; m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
إن m لا يقبل القسمة على P في \mathbb{Z} ، لأنه ، إذا قبل m القسمة على P في \mathbb{Z} ،
فإن $y = 0$ ، وهذا مخالف لكون $y \neq 0$.

بما أن m لا يقبل القسمة على P في \mathbb{Z} ، وبما أن P أولي ، فإن $(m, P) = 1$ ،
وبالتالي ، يمكن إيجاد عددين صحيحين r, q بحيث يكون : $1 = q.m + r.P$ ،
ومنه :

$$e = (q.m + r.P) e = (q.m) e = (q.e) \star (m.e) = (q.e) \star y$$

وأيضاً :

$$e = (m.q + r.P) e = (m.q).e = (m.e) \star (q.e) = y \star (q.e)$$

$$(q.e) \star y = y \star (q.e) = e$$

إذاً :

وبملاحظة أن $q.e \in M$ ، يبين لنا أن y مقلوباً في M بالنسبة للعملية \star .

(20) أثبت وجود حلقة تحوي عنصراً واحداً فقط ، وهل هذه الحلقة إيدالية ،
وهل تحوي على عنصر محايد ، وهل هي حلقة تامة . ثم برهن أنه إذا حوت حلقة
أكثر من عنصر واحد ، فلا يمكن أن يكون لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين
عليها العنصر المحايد نفسه .

الحل :

إذا حوت الحلقة عنصراً واحداً فقط ، فيلزم أن يكون هذا العنصر هو العنصر
المحايد 0 بالنسبة لعملية الجمع ، لأن الحلقة زمرة إيدالية بالنسبة لعملية الجمع (+) ،
وكل زمرة يجب أن تكون غير خالية لأنها تحوي العنصر المحايد على الأقل .

إن $(\{0\}, +, \cdot)$ هي حلقة ، حيث نعرّف عمليتي الجمع (+) والضرب (\cdot) بالشكل :

$$0 + 0 = 0 , 0 \cdot 0 = 0 , \text{ لأن :}$$

إن عملية الجمع مغلقة وإبدالية ، كما أنها تجميعية ، لأن :

$$(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0) = 0$$

إن العنصر 0 هو المحايد بالنسبة لعملية الجمع (+) ، وأن معكوس العنصر الوحيد هو العنصر 0 نفسه، وبالتالي فإن $(\{0\}, +)$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية الجمع.

أما بالنسبة لعملية الضرب (\cdot) ، فمن الواضح أنها تجميعية لأن :

$$0 \cdot (0 \cdot 0) = 0 \cdot (0 \cdot 0) = 0$$

كما أنها توزيعية على الجمع ، لأن :

$$0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$(0 + 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

إن $(\{0\}, +, \cdot)$ حلقة ، بالإضافة إلى ذلك ، إنها حلقة إبدالية ، كما أنها بمحايد (بالنسبة لعملية الضرب) ، ومحايدها الذي يرمز له بـ 1 هو 0 ، أي في هذه الحالة $1 = 0$. كما أن هذه الحلقة تامة لأن 0 هو دوماً حاصل ضرب عنصرين كل منهما يساوي 0 .

لنبرهن الآن ، أنه إذا حوت حلقة أكثر من عنصر واحد ، فلا يمكن أن يكون عمليتي الجمع والضرب العنصر المحايد نفسه .

لنفرض أن الحلقة تحوي بالإضافة إلى العنصر 0 عنصراً آخرأ وهو a ، حيث $a \neq 0$ ، ولنبرهن أن المحايد بالنسبة لعملية الضرب لا يمكن أن يساوي العنصر المحايد بالنسبة للجمع 0 .

بما أن $1 \cdot a = a$ ، فإذا فرضنا أن $1 = 0$ ، لوجدنا أن $0 \cdot a = 0$ ، ولما كان $0 \cdot a = 0$ فإنه ينتج من المساواة $0 \cdot a = 0$ ، والمساواة $0 = a$ ، وهذا غير صحيح لأننا فرضنا $a \neq 0$ ، إذا فرضنا $1 = 0$ خاطئ ، أي أن $1 \neq 0$.

(21) لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بول (أي أنها حلقة ويتحقق فيها $x^2 = x$ ، مهما يكن

$(x \in \mathbb{R})$ ، والمطلوب :

تحقق من أن : $x + x = 0$ و $x + y = 0$ لكل x, y من \mathbb{R} .
الحل :

لدينا من أجل x من \mathbb{R} : $(x + x)^2 = x + x$ ، ومنه يكون :

$$(x + x)(x + x) = x + x$$

بما أن الضرب توزيحي على الجمع ، لذلك :

$$(x + x) \cdot x + (x + x) \cdot x = x + x$$

$$x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x$$

(لأن الضرب توزيحي على الجمع أيضاً) .

بما أن العملية (+) تجميعية ، لذا :

$$(x + x) + (x + x) = x + x \Rightarrow x + x = 0$$

من المساواة الأخيرة ، يمكن كتابة ، أي كان y, x من \mathbb{R} ، فإن :

$$x \cdot y + x \cdot y = 0$$

وبما أن $x^2 = x$ لكل x من \mathbb{R} ، نجد :

$$(x \cdot x) \cdot y + x \cdot (y \cdot y) = 0$$

وبما أن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ إبدالية ، والضرب تجميعي في \mathbb{R} فيكون :

$$(x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) \cdot y = 0$$

$$x \cdot y \cdot (x + y) = 0$$

لأن الضرب توزيحي على الجمع في \mathbb{R} .

(22) ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$ ، برهن أن جميع العبارات التالية متكافئة :

(1) n عدد أولي ، (2) $(\mathbb{Z}/\langle n \rangle, +, \cdot)$ حلقة تامة ، (3) $(\mathbb{Z}/\langle n \rangle, +, \cdot)$ حقل .

الحل :

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

$$a + \langle n \rangle , b + \langle n \rangle \in \mathbb{Z}/\langle n \rangle$$

ليكن :

لكل a, b من \mathbb{Z} بحيث يكون :

$$(a + \langle n \rangle)(b + \langle n \rangle) = \langle n \rangle$$

أي أن :

$$a \cdot b + \langle n \rangle = \langle n \rangle$$

وهذا يعني أن $a \cdot b \in \langle n \rangle$ ، وبالتالي يوجد عنصر وليكن r من Z بحيث يكون :
 $a \cdot b = r \cdot n$ ، أي أن $n/a \cdot b$ ، وبما أن n عدد أولي فإن n/a أو n/b . وهذا يعني
 أن $a \in \langle n \rangle$ أو $b \in \langle n \rangle$ ، وبالتالي فإن :

$a + \langle n \rangle = \langle n \rangle$ أو $b + \langle n \rangle = \langle n \rangle$ ، لذا فإن $Z/\langle n \rangle$ لا تحوي
 قواسم للصفر وبالتالي فإن $(Z/\langle n \rangle, +, \cdot)$ حلقة تامة .

$$(2) \Rightarrow (3)$$

بما أن $(Z/\langle n \rangle, +, \cdot)$ حلقة تامة منتهية ، فحسب المبرهنة (كل حلقة تامة
 منتهية تشكل حقلاً) نجد أن $(Z/\langle n \rangle, +, \cdot)$ حقل .

$$(3) \Rightarrow (1)$$

لنفرض أن $(Z/\langle n \rangle, +, \cdot)$ حقل ، ولنفرض العكس ، أي لنفرض أن n عدداً
 ليس أولياً ، وبالتالي يكون $n = a \cdot b$ حيث $1 < a, b < n$.
 الآن ، كل من $a + \langle n \rangle$ و $b + \langle n \rangle$ عنصر غير صفري من $(Z/\langle n \rangle, +, \cdot)$ ،
 كما أن :

$$(a + \langle n \rangle)(b + \langle n \rangle) = a \cdot b + \langle n \rangle = n + \langle n \rangle = \langle n \rangle$$

وهذا يناقض كون أن الحقل $(Z/\langle n \rangle, +, \cdot)$ لا يحوي قواسم للصفر . إذن n عدد
 أولي .

(23) في حلقة المصفوفات $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ، أثبت أن $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

متساويا القوي .

الحل :

نلاحظ بسهولة أن :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذا يبين لنا أن المصفوفتين $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ متساويتا القوي .

2- تمرينات غير محلولة للفصل الأول

1- ليكن لدينا النظام (Q, \oplus, \odot) حيث أن :

$$a \odot b = a.b + a + b \quad \text{و} \quad a \oplus b = a + b + 1 ; \quad \forall a, b \in Q$$

بين فيما إذا كان هذا النظام يشكل حلقة إبدالية بمحايد .

الجواب : يشكل (Q, \oplus, \odot) حلقة إبدالية بمحايد .

2- أثبت أن النظام $(Z, \oplus, 0)$ حيث أن :

$$a \circ b = a + b - a.b \quad \text{و} \quad a \oplus b = a + b - 1 ; \quad \forall a, b \in Z$$

يشكل حلقة تامة .

3- برهن أن النظام (R, \star, T) ، حيث أن :

$$r \star s = 2(r + s) \quad , \quad r T s = r.s ; \quad r, s \in R$$

لا يشكل حلقة .

4- برهن أن النظام $(R^*, \star, 0)$ ، حيث أن :

$$r \star s = 2r.s \quad , \quad r \circ s = r.s ; \quad r, s \in R^*$$

يشكل حلقة .

5- ليكن النظام (R^+, \star, \perp) ، حيث أن :

$$r \star s = r.s \quad , \quad r \perp s = r^s ; \quad r, s \in R^+$$

أثبت أن هذا النظام يشكل حلقة .

6- ليكن كل من S, R حلقتين إبداليتين بمحايد ، بالنسبة للعمليات $(+)$ و (\cdot)

العادييتين ، أثبت أن $R \times S$ هي حلقة إبدالية بمحايد حيث أن :

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d) ; \quad \forall (a, b), (c, d) \in R \times S$$

تسمى عادةً هذه الحلقة بحلقة الضرب المباشر Direct product للحلقتين S, R .

7- أثبت أن حلقة الأعداد المركبة $(C, +, \cdot)$ هي حلقة تامة حيث :

$$C = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

بالنسبة للعمليات $(+)$ و (\cdot) العاديتين .

8- لتكن $(R, +)$ زمرة إبدالية ، هل يكون النظام $(R, +, \cdot)$ حلقة ، حيث (\cdot)

عملية معرفة على R بالشكل : $a \cdot b = a$ لكل a, b من R .

9- أثبت أن العنصر $2 + \sqrt{3}$ يمثل عنصر وحدة في الحلقة $(Z[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ،

ثم أوجد عنصر وحدة آخر في هذه الحلقة حيث :

$$Z[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} ; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

10- أوجد قواسم الصفر (إن وجدت) في الحلقات التالية :

$$(Z_4, +, \cdot), (Z_6, +, \cdot), (Z, +, \cdot)$$

11- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ، عنصرها المحايد هو e ، وإذا كان $e^2 = e$ (عنصر

متساوي القوى في الحلقة R) ، وإذا كان :

$$e R e = \{e a e ; a \in R\}$$

أثبت :

(1) $(e R e, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ويكون :

$$e R e = \{a \in R : e a = a = a e\}$$

(2) إذا كانت $S \subseteq R$ ، فإن S تشكل حلقة جزئية من R بالنسبة للعمليات

نفسها المعرفة على R ، إذا ، فقط إذا كانت S حلقة جزئية من $(e R e, +, \cdot)$ ،

حيث $e^2 = e$.

12- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، أثبت أن مجموعة العناصر المعكوسة في R

نرمز لها بـ $U(R)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب (\cdot) .

13- لتكن $Q[\sqrt{2}] = \{r + s\sqrt{2} : r, s \in Q\}$ ، أثبت أن $(Q[\sqrt{2}], +, \cdot)$

حقل .

14- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ، أثبت أن الشروط التالية متكافئة :

(1) إذا كان $a \cdot b = 0$ في R ، عندها إما $a = 0$ أو $b = 0$.

(2) إذا كان $ab = ac$ في R و $a \neq 0$ ، عندئذٍ $b = c$.

15- لتكن $(P(X), +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ϕ هو المحايد بالنسبة لعملية الجمع

و X لمحايد بالنسبة لعملية الضرب) ، حيث :

$$A + B = A \Delta B , A \cdot B = A \cap B , A, B \subseteq X$$

أثبت أن الحلقة $(P(X), +, \cdot)$ هي حلقة بول .

16- أثبت أن مميز الحلقة البولية يساوي 2 .

17- أثبت أن العلاقة $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ لا تصح في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

إلا إذا كانت هذه الحلقة إبدالية ، لكل y, x من R .

18- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما (غير إبدالية) ، ولنعرف عليها العملية \perp بالشكل :

$$x \perp y = x \cdot y - y \cdot x ; \forall x, y \in R$$

المطلوب :

(1) احسب $x \perp y$ و $y \perp x$ ، وماذا تستنتج .

(2) بين فيما إذا كانت العملية \perp توزيعية بالنسبة لعملية الجمع (+) .

(3) برهن أن من أجل كل z, y, x من R ، فإن :

$$x \perp (y \perp z) + y \perp (z \perp x) + z \perp (x \perp y) = 0 \quad (أ)$$

$$y \perp (x \perp z) = x \perp (y \perp z) - (x \perp y) \perp z \quad (ب)$$

19- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وبفرض أن العنصر x معدوم القوى في الحلقة

المدروسة ، (أي يوجد عدد صحيح $n > 0$ بحيث يكون $x^n = 0$) . وإذا كان y, x

عنصرين قابلين للمبادلة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ وأن كلاً منهما معدوم القوة ، أثبت أن

$x + y$ و $x \cdot y$ معدوم القوة أيضاً .

20- لتكن Δ, ∇ عمليتين معرفتين على مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالشكل :

$$a \Delta b = a + b - 1 , a \nabla b = a + b - a \cdot b$$

لكل b, a من Z ، المطلوب :

هل تشكل هذه الحلقة حقلاً .

21- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة بمحايد ، وليكن a, b من R . أثبت أنه إذا كان $a^2 = 1$ ، فإن $a = 1$ أو $a = -1$.

22- ليكن (F, T, \star) حقلاً ما ، ولنرمز لعنصر الوحدة فيه بالرمز e ، ولصفره بالرمز O ، ولتكن :

$$M = \{x \in F : x = n.e ; n \in Z\}$$

وليكن للحقل (F, T, \star) مميز $P \neq 0$. بين أن M تتألف فقط ، من العناصر المختلفة فيما بينها مثني مثني ، التالية :

$$O, e, \dots, (P-1)e$$

23- إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، مستفيداً من خواص عملية الضرب وتعريف العملية المعاكسة له ، أثبت أنه إذا كان $a, b, c, d \in F$ حيث $a \neq 0, d \neq 0$ ، فإن :

$$a/b = c/d \Leftrightarrow a \cdot d^{-1} = c \cdot b^{-1}$$

24- أثبت أن كل عنصر في حلقة $(R, +, \cdot)$ المنتهية وبمحايد ، إما أن يكون عنصر الوحدة ، أو أن يكون قاسم للصفر .

25- لتكن $(M_2(R), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة الحقيقية من الدرجة الثانية .

بين فيما إذا كان العنصران $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ متلاشيان في الحلقة

$(M_2(Z_2), +, \cdot)$. ثم أثبت أن العنصر $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ في الحلقة $(M_2(Z_2), +, \cdot)$ متلاشي .

26- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ، ونفرض أن a عنصراً متلاشياً فيها ، أثبت أن $(1-a)$ عنصر وحدة فيها .

27- ليكن a عنصراً متساوي القوى في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، أثبت أن $1-a$ متساوي القوى أيضاً .

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل الثاني:

الحلقات والحقول الجزئية

والمثاليات

*Subring and subfields
& Ideals*

3- تمرينات محلولة للفصل الثاني

- الحلقات والحقول الجزئية والمثاليات -

1- لتكن الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$ حيث $M_2(Z) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ، ولتكن

المجموعتان:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in Z \right\} , T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; b, c \in Z \right\}$$

برهن أن كلا من $(S, +, \cdot)$ و $(T, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$.

الحل :

نلاحظ أولاً أن $S \neq \phi$ ، لأن $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ ، ومن ناحية ثانية إن $S \subseteq M_2(Z)$.

إذن $\phi \neq S \subseteq M_2(Z)$.

لكل $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ من S ، فإن :

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & b_1 b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

إذن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$.

بالطريقة نفسها نبرهن أن $(T, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(M_2(Z), +, \cdot)$.

2- إذا كانت $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية بمحايد من الحلقة $(R, +, \cdot)$. من الممكن أن

لا يكون للحلقة $(R, +, \cdot)$ محايداً ، هاتِ مثالاً يوضح هذه المقولة .

الحل :

لنأخذ الحلقة التالية :

$$(R, +, \cdot) = \left(\left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in Z \right\}, +, \cdot \right\} \right)$$

والحلقة الجزئية بمحايد منها التالية :

$$(S, +, \cdot) = \left(\left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in Z \right\}, +, \cdot \right\} \right)$$

إن الحلقة $(R, +, \cdot)$ ليست بمحايد ، بينما الحلقة الجزئية $(S, +, \cdot)$ من الحلقة

$$(R, +, \cdot) \text{ تملك محايد (بالنسبة لعملية الضرب) وهو } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

3- لتكن $(R_1, +, \cdot)$ و $(R_2, +, \star)$ حلقتين بمحايدين ما ، ولنرمز لمحايد الحلقة

$(R_2, +, \star)$ بالرمز o' ، ولنفرض أن :

$$S = \{(a, b) : a \in R_1, b \in R_2\}$$

$$S_1 = \{(a, o') : a \in R_1\}$$

ولتكن Δ و Δ' عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على S بالشكل :

$$(x, y) \Delta (x_1, y_1) = (x + x_1, y \cdot y_1)$$

$$(x, y) \Delta' (x_1, y_1) = (x \cdot x_1, y \star y_1)$$

وذلك من أجل أي (x, y) و (x_1, y_1) من S . إن (S, Δ, Δ') حلقة بمحايد .

والمطلوب أثبت أن (S_1, Δ, Δ') حلقة جزئية من الحلقة (S, Δ, Δ') .

الحل :

(1) من الواضح أن $S_1 \subseteq S$ و $\phi \neq S_1$.

(2) إذا كان a_1 و a_2 عنصرين ما من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن :

$$(a_1, o') \Delta' (a_2, o') = (a_1 \cdot a_2, o' \star o')$$

$$= (a_1 \cdot a_2, o') \in S_1$$

$$(a_1, o') \Delta (-a_2, o') = (a_1, o') \Delta (-a_2, -o')$$

$$= (a_1, o') \Delta (-a_2, o')$$

$$= (a_1 - a_2, o' T o')$$

$$= (a_1 - a_2, o') \in S_1$$

من (1) و(2) نستنتج أن (S_1, Δ, Δ') هي حلقة جزئية من الحلقة (S, Δ, Δ') .
لنثبت الآن أن $(1, o')$ هو المحايد في الحلقة الجزئية (S_1, Δ, Δ') . لنرمز بـ 1 للمحايد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، عندئذ يكون $(1, o')$ عنصراً ينتمي إلى S_1 ، ومن ناحية ثانية يكون:

$$(a, o') \Delta' (1, o') = (a \cdot 1, o' \star o') = (a, o')$$

$$= (1 \cdot a, o' \star o') = (1 \cdot o', o' \star o')$$

$$= (1, o') \Delta' (a, o') \quad \forall a \in R$$

إذن $(1, o')$ هو المحايد في الحلقة الجزئية (S, Δ, Δ') .

4- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد، ولنرمز لمحايدها بـ 1 ، ولتكن I مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا وجد في I عنصر b له معكوس في R ، بالنسبة للعملية (\cdot) ، فإن $I = R$.

الحل:

ليكن a عنصراً ما من R ، فإن:

$$a = a \cdot 1 = a (b^{-1} \cdot b) = (a \cdot b^{-1}) \cdot b \in I$$

5- لتكن الحلقة الابتدائية $(Z \times Z, +, \cdot)$. أثبت أن المجموعة التالية:

$$I = \{(a, 2b) ; a, b \in Z\}$$

الحل:

إن $I \neq \emptyset$ ، لأن $(0, 0) \in I$ ، أي أن $I \subseteq Z \times Z$.

ليكن $(a, 2b)$ و $(c, 2d)$ عنصرين ما من I ، وإذا كان $(x, y) \in Z \times Z$ ، فإن:

$$(a, 2b) - (c, 2d) = (a - c, 2(b - d)) \in I$$

$$(x, y) \cdot (a, 2b) = (x \cdot a, 2yb) \in I$$

نستنتج مما سبق أن I هي مثالية من الحلقة $(Z \times Z, +, \cdot)$.

6- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان $a \in R$ ، أثبت أن المجموعة

$$\langle a \rangle = \{ r \cdot a + n \cdot a : r \in R, n \in Z \}$$

مثالية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

الحل :

نلاحظ أولاً أن $a = 0 \cdot a + 1 \cdot a \in \langle a \rangle$ ، أي أن $\langle a \rangle \neq \emptyset$.

ليكن $r_1, r_2 \in R$ ، $n_1, n_2 \in Z$ حيث $r_1 a + n_1 a, r_2 a + n_2 a \in I$

وإذا كان $s \in R$ فإن :

$$(r_1 a + n_1 a) - (r_2 a + n_2 a) = (r_1 - r_2) \cdot a + (n_1 - n_2) \cdot a \in \langle a \rangle$$

$$s \cdot (r_1 a + n_1 a) = (s r_1 + s n_1) \cdot a + 0 \cdot a \in \langle a \rangle$$

نستنتج مما سبق أن $\langle a \rangle$ مثالية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

7- لتكن $(Z \times Z, +, \cdot)$ حلقة ، أثبت أن المجموعة $I = \{(k, k) : k \in Z\}$ ليست

مثالية في الحلقة المذكورة .

الحل :

نلاحظ أن $\emptyset \neq I \subseteq Z \times Z$. لكن الشرط التالي غير محقق : $\forall x \in I, a \cdot x \notin I$

فإن $a \cdot x \notin I$ ، فعلى سبيل المثال نأخذ :

$$(2, 5) \cdot (k, k) = (2k, 5k) \notin I$$

8- إذا كان كل من $(F, +, \cdot)$ و $(K, +, \cdot)$ حقلاً ، أوجد جميع مثاليات $F \times K$

الحل :

إن مثاليات $F \times K$ هي $\{0\} \times \{0\}$ ، $F \times \{0\}$ ، $\{0\} \times K$ و $F \times K$.

9- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة لا تحوي قواسم للصفر وبحيث تكون أي حلقة جزئية

من R هي مثالية منها ، أثبت أن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية .

الحل :

لنفرض أن $a \in R, a \neq 0$ ، وبما أن مركز حلقة $C(a)$ هي حلقة جزئية من R حيث:

$$C(a) = \{x \in R : x.a = a.x\}$$

فهي مثالية من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولذلك $r.a \in C(a)$ لكل $r \in R$.

بما أن $r.a \in C(a)$ ، فإن $ar.a = ra^2$ ، وبالتالي فإن $(a.r - r.a).a = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $a.r - r.a = 0$ ومنه يكون $ar = ra$ ، إذن الحلقة $(R, +, \cdot)$ إبدالية.

10- لتكن $\{I_i\}_{i \in I}$ أسرة غير خالية من المثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، أثبت أن

$$\bigcap_{i \in I} I_i \text{ مثالية في الحلقة } (R, +, \cdot) .$$

الحل :

نلاحظ ، أولاً أن $\bigcap_{i \in I} I_i \neq \emptyset$. إذا كان y, x عنصرين ما من $\bigcap_{i \in I} I_i$ ، وبالتالي

فإن $x, y \in I_i$ ومنه يكون $x - y \in I_i \forall i \in I$ ، إذن $x - y \in \bigcap_{i \in I} I_i$.

ليكن الآن y عنصراً ما من $\bigcap_{i \in I} I_i$ و a من R ، أي أن $y \in \bigcap_{i \in I} I_i$ أي أنه لكل

$$i \in I \text{ و } y \in I_i \text{ وبالتالي } y.a \in I_i \forall i \in I .$$

$$\text{وبالتالي فإن } y.a \in \bigcap_{i \in I} I_i .$$

نستنتج مما سبق أن $\bigcap_{i \in I} I_i$ مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

11- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، وإذا كانت I مثالية في الحلقة

$$(R, +, \cdot) . \text{ أثبت أن } I = I : R .$$

الحل :

من مبرهنة قسمة المثاليات نجد أولاً أن $I \subseteq I : R$ لنبرهن الآن أن $I : R \subseteq I$ ،

ليكن x عنصراً ما من $I : R$ ، وبالتالي فإن $x.R \subseteq I$ ، ومن ثم فإن $x.1 \in I$

حيث 1 هو عنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، أي أن $x \in I$. إذن $I = I : R$.

12- إذا كان n عدداً صحيحاً ، ولتكن I مجموعة كل مضاعفات للعدد n في

حلقة الأعداد الصحيحة Z أي أن $I = \{n.r : r \in Z\}$ أثبت أن I مثالية في الحلقة

$$(Z, +, \cdot) .$$

الحل :

نلاحظ أولاً أن $\phi \neq I \subseteq Z$.

كما أنه ، إذا كان y, x عنصرين ما من I ، فإن $x = n.a$, $y = n.b$ حيث $a, b \in Z$ ، وبالتالي فإن :

$$x - y = n.a - n.b = n(a - b) \in I$$

كما أن :

$$b(n.a) = n.(b.a) ; a, b \in Z$$

إذن $I = n.Z$ تشكل مثالية في الحلقة $(Z, +, \cdot)$.

13- لتكن $R = (M_2(Z), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية ،

أثبت أن $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in Z \right\}$ مثالية يمينية .

الحل :

إن $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ وهذا يعني أن $I \neq \phi$.

ليكن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

وبالتالي فإن :

$$A - B = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

كذلك إذا كان $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ من الحلقة R ، فإن :

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

نستنتج مما سبق أن I هي مثالية يمينية في الحلقة R .

14- أثبت أن لكل حقل $(F, +, \cdot)$ مثاليان فقط هما $\{0\}$ و F نفسه .

الحل :

إن $\{0\}$ مثالية للحقل لأن : $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 ; \forall a \in F$

لنفرض الآن أن المثالية I لا تساوي $\{0\}$ ، وهذا يعني أنه يوجد عنصر $a \neq 0$ في I ، ويوجد معكوسه a^{-1} في F ، وبالتالي حسب تعريف المثالية سيكون :

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e \in I$$

وهذا سيؤدي إلى أنه مهما كان العنصر x من F ، فإن :

$$e \cdot x = x \cdot e = x \in I$$

وهذا يبرهن أن $F = I$.

15- لتكن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة ، إن $4\mathbb{Z}$ هي مثالية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. اكتب عناصر المجموعة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

الحل :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0 + 4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\}$$

ويمكن التحقق من أن $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد، وذلك بالاستفادة من مبرهنة حلقة القسمة .

16- قَدِّم مثلاً لحلقة تامة ولتكن $(R, +, \cdot)$ ومثالية ، لتكن I من R بحيث يكون R/I حقلاً .

الحل :

بأخذ الحلقة $(R, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ وبأخذ المثالية I بالشكل $I = 2\mathbb{Z}$ ، نجد أن $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ تشكل حقلاً .

17- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن I مثالية فيها ، عندها المثاليات اليسارية (اليمينية) في حلقة القسمة $(R/I, +, \cdot)$ هي من الشكل $\bar{J} = J/I$ حيث J مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وأن $I \subseteq J$.

الحل :

ليكن \bar{J} مثالية يسارية في الحلقة $(R/I, +, \cdot)$. ولنبرهن أن $\bar{J} = J/I$ حيث أن J هي مثالية يسارية في $(R, +, \cdot)$ وتحتوي I . لنأخذ المجموعة :

$$J = \{x : x \in R ; x + I \in \bar{J}\}$$

ولنثبت أن J هي مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

بما أن \bar{J} مثالية يسارية في $(R/I, +, \cdot)$ ، فإن $\bar{0} = 0 + I$ وهذا يعني أن $0 \in J$ ، أي أن $J \neq \emptyset$.

ليكن x, y عنصرين من J ، عندئذ :

$$\bar{x} = x + I, \bar{y} = y + I$$

ومنه يكون لدينا :

$$(x - y) + I = (x + I) + (-y + I) = \bar{x} - \bar{y} \in \bar{J}$$

إذن $\bar{x} - \bar{y} \in J$.

كذلك، أيًا كان $a \in R$ ، فإن $a + I \in R/I$ وبالتالي يكون :

$$a \cdot x + I = (a + I) \cdot (x + I) = \bar{a} \cdot \bar{x} \in \bar{J}$$

نستنتج مما سبق أن المجموعة J تشكل مثالية يسارية في الحلقة $(R, +, \cdot)$. كما أن أيًا كان $a \in I$ ، فإن $a + I = \bar{0} \in \bar{J}$ ، وبالتالي نجد $I \subseteq J$.

لنبرهن أخيراً أن $\bar{J} = J/I$.

ليكن $\bar{Z} = Z + I \in J/I$ ، عندئذ $Z \in J$ ومنه $Z + I \in \bar{J}$ ، أي أن $J/I \subseteq \bar{J}$.

ومن ناحية ثانية، أيًا كان $\bar{Z} \in \bar{J} \subseteq R/I$ أي أن $\bar{Z} = Z + I$ ، فإن $Z \in R$ ، وبالتالي نجد أن :

$\bar{Z} = Z + I \in J/I$ أي أن $\bar{J} \subseteq J/I$.

مما سبق نجد أن $\bar{J} = J/I$.

4- تمرينات غير محلولة للفصل الثاني

1- إذا كانت K, J, I ثلاثة مثاليات للحلقة $(R, +, \cdot)$ ، بحيث $J \subseteq I$ ، أثبت أن :

$$I \cap (J + K) = J + (I \cap K)$$

2- لتكن المجموعة التالية : $M = \{m, n, p, q\}$. لنزوّد M بالعمليتين

المعرفتين بالجدولين التاليين :

+	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	q	p
p	p	q	m	n
q	q	p	n	m

•	M	n	p	q
m	M	m	m	m
n	M	n	m	n
p	M	p	m	p
q	m	q	m	q

المطلوب : أثبت أن $(M, +, \cdot)$ حلقة غير إيدالية . أوجد صفر هذه الحلقة ، وإذا كانت $I = \{m, p\}$ ، برهن أن I مثالية في الحلقة $(M, +, \cdot)$.

3- أثبت أن المجموعة $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ حلقة جزئية من حلقة

المصفوفات الحقيقية من الدرجة الثانية بالنسبة لعملية الجمع والضرب للمصفوفات ، ثم برهن أن M تشكل مثالية يسارية لكنها ليست مثالية يمينية في الحلقة المفروضة.

4- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، L حلقة جزئية في R ، وإذا كانت I مثالية في

الحلقة R ، أثبت أن المجموعة المعرفة بالشكل :

$$L + I = \{x + y , x \in L \text{ و } y \in I\}$$

حلقة جزئية في الحلقة R تحوي I ، وإن $J \cap I$ مثالية في L .

5- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة ، وإذا كان $J + J_i = R$ ، حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ،

وذلك من أجل المثاليات J, J_i للحلقة R ، أثبت :

$$J + \bigcap_{i=1}^n J_i = R = J + \prod_{i=1}^n J_i$$

6- نفرض أن $m = -14$, $n = 59$. احسب ناتج قسمة n على m ، واحسب الباقي أيضاً ، ثم أوجد r , q اللذين يحققان العلاقة :

$$n = m.q + r ; 0 \leq r \leq |m|$$

أعد حل المسألة من أجل العددين $m = 11$, $n = -79$.

7- لتكن $(Z_{10}, \oplus, \otimes)$ حلقة الأعداد الصحيحة بمقاس 10 ، أوجد $-3, -8, -3^{-1}$ في Z_{10} ، ثم أوجد جذور كثيرة الحدود $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ في الحلقة Z_{10} .

8- لتكن $(Z, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة و Im متكونة من مضاعفات العدد 2 حيث $m \geq 2$ ، أثبت أن Im مثالية في Z .

9- لتكن S مجموعة الأعداد الحقيقية التي من الشكل $a + \sqrt{3}b$ ، حيث a, b من Q ، بيّن أن S حقل بالنسبة للعمليات $(+)$ و (\cdot) .

10- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الحقيقية ، أثبت أن مجموعة الأعداد الحقيقية التالية :

$$M = \{m + n\sqrt{3} : m, n \in Z\}$$

هي حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

ثم برهن أن المجموعة الجزئية I من M حيث m, n أعداد صحيحة زوجية هي مثالية من الحلقة $(M, +, \cdot)$.

11- أوجد الحلقات الجزئية من حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$.

12- لتكن حلقة المصفوفات المربعة $(M_2(R), +, \cdot)$ ، ولتكن

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ; a, b, c \in R \right\}$$

أثبت أن $(S, +, \cdot)$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $(M_2(R), +, \cdot)$.

13- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية محايد ، ولتكن $(S, +, \cdot)$ حلقة جزئية منها وبمحايد أيضاً . ولنفرض أن $1'$ هو المحايد فيها ، ولنفرض أن المحايد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالنسبة للعمليات $(+)$ لا ينتمي إلى S ، أثبت أن $1'$ قاسم للصفر في الحلقة

. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

14- أثبت أن $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} ; a, b \in \mathbb{Z}\}$ ليست حقلاً جزئياً من

الحقل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

15- لتكن $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية ، أثبت :

(1) أن $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ مثالية يمينية ولكنها ليست مثالية يسارية في

الحلقة $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$.

(2) أما المجموعة $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ فهي مثالية في الحلقة

$(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$.

(3) المجموعة $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{Z} \right\}$ هي حلقة جزئية ولكنها ليست مثالية

يمينية أو يسارية من الحلقة $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$.

16- أثبت أن المجموعة $I = \{(k, 0) ; k \in \mathbb{Z}\}$ هي مثالية من الحلقة

$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$.

17- لتكن $\{I_i\}_{i \in I}$ أسرة غير خالية من المثاليات في حلقة ما، ولتكن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

نرمز عادةً بـ $\sum_{i \in I} I_i$ لمجموعة كل العناصر التي هي من الشكل $\sum_{i \in I} x_i$ حيث أن

$x_i \in I_i$ ، وحيث أن جميع x_i ما عدا عدداً منتهياً منها أصفار . أثبت أن $\sum_{i \in I} I_i$

مثالية في الحلقة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

18- لتكن $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة قياس 6 ، وإذا كانت $I = \{0, 3\}$

مثالية مولداً بالعنصر $\langle 3 \rangle$. شكّل جدول كليتي لحلقة القسمة .

19- لنفرض أن I, J_1, J_2, \dots, J_n مثاليات في حلقة إبدالية ما ، ولتكن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

بيّن أن :

$$\left(\bigcap_{i=1}^n J_i \right) : I = \bigcap_{i=1}^n (J_i : I)$$

20- قدّم مثلاً لحلقة تامة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ولمثالية I من \mathbb{R} بحيث تحتوي حلقة القسمة

$(R/I, +, \cdot)$ على قواسم للصفر .

21- إذا كانت $R = (Z_6, +, \cdot)$ حلقة ، وكانت $I = \{0, 3\} \subseteq R$ ، أثبت أن I

مثالية في R ، ثم أوجد حلقة القسمة Z_6/I للمثالية I في Z_6 .

22- لتكن $(F, +, \cdot)$ حلقة الدوال الحقيقية ، وإذا كانت المجموعة I التالية :

$$I = \{ f \in F ; f(c) = 0 , c \in R \}$$

أثبت أن I مثالية في الحلقة $(F, +, \cdot)$.

23- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إيدالية بمحايد ، نقول عن العنصر x من R إنه

متلاشي (معدوم) إذا وجد $n \in Z^+$ بحيث $x^n = 0$. برهن أن مجموع العناصر

المتلاشية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ تشكل مثالية . ثم أثبت أن $1 - x$ هو عنصر الوحدة

في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

24- لتكن I مثالية من الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$. وإذا كان $a \in I$ عنصر وحدة

أثبت أن $I = R$.

25- لتكن $R = (M_2(Z), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية .

بين فيما إذا كانت المجموعة $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in Z \right\}$ تشكل مثالية يسارية

في الحلقة R .

26- لتكن $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in Z \right\}$ حلقة المصفوفات المربعة من

الدرجة الثانية . وإذا كانت $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in Z \right\}$

و $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in Z \right\}$ مثاليين فيها ، أثبت أن $I \cdot J$ و $J + I$ مثاليين في

الحلقة R .

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل الثالث:

التماثل الحلقبي

Isomorphism of ring

5- تمرينات محلولة للفصل الثالث

- التماثل الحلقى -

1- لتكن الحقتان $R = (Z_4, \oplus, \otimes)$ و $S = (Z_6, \oplus, \otimes)$ ، وإذا كان التطبيق $\varphi : R \longrightarrow S$ ، معرفاً بالشكل : $\varphi(\bar{a}) = 3\bar{a}$ ، لكل \bar{a} من R ، برهن أن φ تشاكل حلقى ، ثم أوجد نواته .

الحل :

لكل \bar{a} و \bar{b} من R نجد :

$$\varphi(\overline{a \oplus b}) = 3(\overline{a \oplus b}) = 3\bar{a} \oplus 3\bar{b} = \varphi(\bar{a}) \oplus \varphi(\bar{b})$$

$$\varphi(\overline{a \otimes b}) = 3(\overline{a \otimes b}) = 3\bar{a} \otimes 3\bar{b} = \varphi(\bar{a}) \otimes \varphi(\bar{b})$$

$$\text{Ker } \varphi = \{ \bar{a} \in R : \varphi(\bar{a}) = 0 \}$$

حيث 0 صفر الحلقة S .

$$= \{ \bar{a} \in R : 3\bar{a} = 0 \}$$

$$= \{ \bar{0}, \bar{2} \} \subseteq R$$

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وليكن a عنصر وحدة في R ، ولنعرف

التطبيق $\varphi : R \longrightarrow R$ بالشكل :

$$\varphi(r) = a.r.a^{-1} ; \forall r \in R$$

المطلوب : أثبت أن التطبيق φ تماثل .

الحل :

لكل r_1, r_2 من R يكون لدينا :

$$\varphi(r_1 + r_2) = a.(r_1 + r_2).a^{-1} = a.r_1.a^{-1} + a.r_2.a^{-1} = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1.r_2) = a.(r_1.r_2).a^{-1} = a.r_1.(a.a^{-1}).r_2.a^{-1}$$

$$= (a.r_1.a^{-1}).(a.r_2.a^{-1}) = \varphi(r_1) . \varphi(r_2)$$

نستنتج مما سبق أن φ تشاكل من الحلقة R إلى نفسها .

لنبرهن الآن أن التطبيق φ متباين (أحادي) :

ليكن $r \in \text{Ker } \varphi$ ، وهذا يعني أن $\varphi(r) = 0$ ، وبالتالي ، فإن $a.r.a^{-1} = 0$ ، بالضرب من اليمين a ومن اليسار بـ a^{-1} نجد أن $r = 0$ ، وهذا يعني أن φ متباين .

لنبرهن أخيراً ، أن φ شامل ، إذا كان $r \in R$ ، فإن :

$$\varphi(a^{-1}.r.a) = a(a^{-1}.r.a).a^{-1} = (a.a^{-1})r.(a.a^{-1}) = r$$

وهذا يعني أن التطبيق φ شامل .

نستنتج مما سبق أن φ تماثل . يسمى عادةً هذا التماثل بالتماثل الذاتي .

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ، وليكن φ تطبيقاً من R إلى نفسها ، معرفاً بالشكل $\varphi(a) = a$ ، لكل a من R ، أثبت أن φ تشاكل حلقي .

الحل :

لكل a, b من R لدينا :

$$\varphi(a + b) = a + b = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(a.b) = a.b = \varphi(a) . \varphi(b)$$

نستنتج أن φ تشاكل حلقي .

4- ليكن φ تشاكلاً للحلقة $(Z, +, \cdot)$ في نفسها ، وإذا كان m عدداً صحيحاً بحيث يكون : $\varphi(m) \neq 0$ ، أثبت أن : $\varphi(n) = n$ لكل n من Z .

الحل :

بما أن $m = 1.m$ ، وبالتالي ، فإن :

$$\varphi(m) = \varphi(1.m) = \varphi(1) . \varphi(m)$$

ومنه يكون $\varphi(1) = 1$.

لنفرض الآن أن n عدداً صحيحاً موجباً ، وبالتالي ، فإن :

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(1 + 1 + \dots + 1) = \varphi(1) + \varphi(1) + \dots + \varphi(1) \\ &= \underbrace{1+1+\dots+1}_n = n\end{aligned}$$

لنفرض الآن أن n عدداً صحيحاً سالباً ، وبالتالي يمكن كتابة $-n$ حيث t عدد صحيح موجب، ومنه يكون :

$$\varphi(n) = \varphi(-t) = -\varphi(t) = -t = n$$

بالإضافة إلى ذلك ، إذا كان $n = 0$ ، فإن :

$$\varphi(0) = \varphi(0) = 0 = n$$

5- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد (وليكن e) ، أثبت أن φ تشاكلاً من حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ إلى الحلقة $(R, +, \cdot)$ معرفاً بالشكل : $\varphi(n) = n.e$ حيث n من Z . ثم برهن أن $n.e = 0$ ، إذا وفقط إذا ، كان مميز الحلقة a يقسم n .
الحل :

لنرمز بـ $0'$ لصفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن m, n عنصران من Z ، وبالتالي ،
فإن :

$$\varphi(m + n) = (m + n).e = m.e + n.e = \varphi(m) + \varphi(n)$$

كما أن :

$$\begin{aligned}\varphi(m) \cdot \varphi(n) &= (m.e) \cdot (n.e) \cdot \underbrace{(e + e + \dots + e)}_m \cdot n.e \\ &= e.n.e + \dots + e.n.e = n.e^2 + \dots + n.e^2 \\ &= n.e + \dots + n.e = m.n.e = \varphi(m \cdot n)\end{aligned}$$

بما أن φ تشاكل ، فإن حسب الطلب السابق نجد :

$$\varphi(n) = n.e = 0 \Leftrightarrow n \in \text{Ker } \varphi = a.Z \Leftrightarrow a.n$$

6- ليكن $\varphi: R \rightarrow S$ تشاكلاً حلقياً ، حيث أن $R = (Z, +, \cdot)$ و $S = (Z_n, \oplus, \otimes)$ معرفاً بالشكل : $\varphi(a) = [a] \equiv a \pmod n$ لكل a من R . أثبت أن φ تشاكل حلقى ، ثم أوجد نواته .

الحل :

لكل a, b من R ، يكون :

$$\varphi(a + b) = [a + b] = [a] \oplus [b] = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

$$\varphi(a \cdot b) = [a \cdot b] = [a] \otimes [b] = \varphi(a) \otimes \varphi(b)$$

إذن φ تشاكل حلقي ، لنوجد الآن نواته .

$$\text{Ker } \varphi = \{a \in R : \varphi(a) = 0\}$$

حيث 0 هو صفر الحلقة S ، وبالتالي ، فإن :

$$= \{a \in R : [a] = [0]\}$$

$$= \{a \in R : a \equiv 0 \pmod{n}\}$$

$$= \{a \in R : a = n \cdot r ; r \in R\}$$

$$= \{n \cdot r : r \in R\} = n \cdot Z$$

7- ليكن φ تشاكلاً من الحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) . أثبت أن تماثلاً

للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) إذا ، فقط إذا ، كان $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. حيث 0 هو صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$.

الحل :

لنرمز بـ $0'$ لصفر الحلقة (S, T, \star) ، ولنبرهن أولاً أن $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ علماً أن φ تماثلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) .

ليكن x عنصراً ما من $\text{Ker } \varphi$ ، وهذا يعني أن $\varphi(x) = 0'$ ، وبالتالي يكون لدينا:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \quad \text{أي أن } x = 0$$

لنبرهن أن φ تماثل علماً أن $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

بما أن φ تشاكلاً للحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة (S, T, \star) ، لذا يكفي أن نبرهن أن التطبيق φ متباين.

ليكن x_1, x_2 عنصرين ما من R ، بحيث يكون :

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

ومنه :

$$\varphi(x_1) T (-\varphi(x_2)) = o'$$

$$\varphi(x_1) T \varphi(-x_2) = o'$$

$$\varphi(x_1 + (-x_2)) = o' \Rightarrow x_1 + (-x_2) \in \text{Ker } \varphi$$

وبما أن $\text{Ker } \varphi = \{o\}$ ، فإن :

$$x_1 + (-x_2) = 0$$

ومنه يكون $x_1 = x_2$ ، أي أن φ متباين .

8- ليكن φ تشاكلاً شاملاً من الحلقة $(R, +, \cdot)$ إلى الحلقة $(S, +, \cdot)$ وإذا كانت I مثالية للحلقة $(R, +, \cdot)$ تحوي $\text{Ker } \varphi$ ، أثبت :

$$R/I \cong S/\varphi(I) \quad (1)$$

$$(2) \text{ إذا كان } J \text{ مثالية في الحلقة } (S, +, \cdot) \text{ ، فإن : } R/\varphi^{-1}(J) \cong S/J$$

الحل :

$$(1) \text{ لنعرّف التطبيق } \Phi : R/I \longrightarrow S/\varphi(I)$$

$$\Phi(a + I) = \varphi(a) + \varphi(I) ; \forall a \in R$$

لنثبت أولاً ، أن Φ تشاكل ، لكل a, b من R ، فإن :

$$\begin{aligned} \Phi(a + b + I) &= \varphi(a + b) + \varphi(I) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(I) \\ &= (\varphi(a) + \varphi(I)) + (\varphi(b) + \varphi(I)) \\ &= \Phi(a + I) + \Phi(b + I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(a \cdot b + I) &= \varphi(a \cdot b) + \varphi(I) \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) + \varphi(I) \\ &= (\varphi(a) + \varphi(I)) \cdot (\varphi(b) + \varphi(I)) \\ &= \Phi(a + I) \cdot \Phi(b + I) \end{aligned}$$

إذن Φ تشاكل .

لنثبت الآن أن التطبيق Φ شامل ، لكل $b \in S$ ، نفرض أن $b + \varphi(I) \in S/\varphi(I)$ ، وبما φ شامل ، فإنه يوجد عنصر من R وليكن a بحيث يكون $\varphi(a) = b$ ، إذن :

$$\Phi(a + I) = \varphi(a) + \varphi(I) = b + \varphi(I)$$

وهذا يعني أن التطبيق Φ شامل .

نفرض الآن ، أن $\Phi(a + I) = \varphi(I)$ وهذا يؤدي ، إلى أن :

$$\varphi(a) + \varphi(I) = \varphi(I)$$

وبالتالي ، يكون : $\varphi(a) \in \varphi(I)$.

ليكن الآن $\varphi(a) = \varphi(x)$ ، حيث x من I . بملاحظة أن $\varphi(a - x) = 0$ ، أي أن $a - x \in \text{Ker } \varphi$ ، وبما أن $\text{Ker } \varphi \subset I$ ، لذلك $a \in I$ ، وبالتالي يكون $a + I = I$ ، أي أن $a + I$ هو صفر الحلقة R/I ، إذن التطبيق Φ متباين .

نستنتج مما سبق أن : $R/I \cong S/\varphi(I)$

(2) بما أن $\varphi^{-1}(I)$ مثالية للحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبما أن :

$\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(0') \subset \varphi^{-1}(J)$ ، لأن $0' \in J$ ، حيث $0'$ هو صفر الحلقة $(S, +, \cdot)$ ، وباستخدام الطلب (1) السابق نجد أن :

$$R/\varphi^{-1}(J) \cong S/\varphi^{-1}(J) = S/J$$

9- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ و $(S, +, \cdot)$ حلقتين ، إذا كان φ تشاكلاً من R إلى S ، فأثبت أن $\text{Im } \varphi$ حلقة جزئية من الحلقة S .

الحل :

ليكن a, b من $\text{Im } \varphi$ ، وبالتالي ، يوجد عنصران x, y في الحلقة R ، بحيث يكون $a = \varphi(x)$ ، $b = \varphi(y)$.

الآن :

$$\begin{aligned} a - b &= \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(-y) \\ &= \varphi(x - y) \Rightarrow a - b \in \text{Im } \varphi \end{aligned}$$

كذلك :

$$a.b = \varphi(x).\varphi(y) = \varphi(x.y) \Rightarrow a.b \in \text{Im } \varphi$$

نستنتج مما سبق أن $\text{Im } \varphi$ حلقة جزئية من الحلقة $(S, +, \cdot)$.

10- لتكن $R = (Z, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة ، وإذا كانت المثاليات $I = 4z$ و $J = 6z$ ، حقق المبرهنة الثانية لتماثل الحلقات .

الحل :

بما أن :

$$I \cap J = 4z \cap 6z = 12z , I + J = 4z + 6z = 2z$$

وباستخدام المبرهنة الثانية لتماثل الحلقات نجد :

$$2z/6z \cong 4z/12z$$

11- لتكن $(C, +, \cdot)$ حلقة الأعداد المركبة ، وليكن التطبيق $\varphi : C \rightarrow C$ معرفاً بالشكل $\varphi(x) = \bar{x}$ (حيث أن \bar{x} هو مرافق العنصر x في C) ، أثبت أن φ تماثل حلقي .

الحل :

نعلم أنه في حلقة الأعداد المركبة ، ومن أجل أي $x, y \in C$ ، إن :

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} , \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

ومنه يكون :

$$\varphi(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot y) = \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل حلقي .

ويمكن الإثبات بسهولة ، أن التطبيق φ تقابلاً .

12- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إيدالية ، وإذا كانت I مثالية أولية في R ، وإذا كانت I_1, I_2 مثاليتين في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث $I_1 \cdot I_2 \subseteq I$ ، بين أن إحدى المثاليتين I_1, I_2 على الأقل محتواة في I .

الحل :

لنفرض جدلاً عكس ذلك ، وهذا يعني أن بالإمكان إيجاد عنصرين x, y من I_1, I_2

على الترتيب بحيث يكون : $x \notin I, y \notin I$. لكن :

$$x \in I_1, y \in I_2 \Rightarrow x.y \in I_1.I_2 \Rightarrow x.y \in I$$

وبما أن I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، فإن انتماء أحد العنصرين $x.y$ إلى I يؤدي إلى انتماء أحد العنصرين y, x على الأقل ، إلى I ، وهذا مخالف لكون $x \notin I, y \notin I$. إذن إحدى المثاليتين I_1, I_2 على الأقل محتواة في المثالية I .

ملاحظة :

يمكن تعميم التمرين السابق بالشكل :

إذا كانت I مثالية أولية في الحلقة الإبدالية $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان n عدداً صحيحاً موجباً ، وإذا كانت I_1 مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث يكون :

$$I_1^n = \underbrace{I_1.I_1 \dots I_1}_{n \text{ مرة}} \subseteq I$$

فإن $I_1 \subseteq I$.

13- لتكن I مثالية في الحلقة الإبدالية $(R, +, \cdot)$ ، بحيث $I \neq R$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، هو أن لا تحوي الحلقة $(R/I, +, \cdot)$ قواسم للصفر .

الحل :

لنبرهن أولاً ، أن الحلقة $(R/I, +, \cdot)$ لا تحوي قواسم للصفر ، علماً أن المثالية I مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

إذا حوت الحلقة $(R/I, +, \cdot)$ قواسم للصفر ، فإنه يمكن إيجاد عنصرين y, x من R بحيث يكون :

$$x + I \neq I, y + I \neq I$$

$$(x + I) \cdot (y + I) = I$$

لكن :

$$(x + I) \cdot (y + I) = I \Rightarrow x.y + I = I$$

وهذا يؤدي إلى أن $x.y$ من I . وبما أن I مثالية أولية فرضاً في الحلقة $(R,+,.)$ ، فإن انتماء $x.y$ من I يؤدي إلى انتماء أحد العنصرين y,x على الأقل إلى I ، وهذا يعني أن أحد العنصرين $x + I$ ، $y + I$ ، على الأقل ، يساوي I ، وهذا مخالف كون : $x + I \neq I$ ، $y + I \neq I$. إذن الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم للصفر . لنبرهن العكس ، أي لنبرهن أن المثالية I مثالية أولية في الحلقة $(R,+,.)$ ، علماً أن الحلقة $(R/I,+,.)$ لا تحوي قواسم للصفر . من أجل ذلك ، ليكن y,x عنصرين ما من R ، وبحيث يكون $x.y \in I$.

بما أن $x.y \in I$ ، فإن : $x.y + I = I$ وهذا يعني أن : $(x + I) . (y + I) = I$. وبما أن الحلقة $(R/I,+,.)$ (لا تحوي قواسم للصفر ، فإن المساواة الأخيرة تبين أن أحد العنصرين $x + I$ ، $y + I$ على الأقل ، يساوي I ، وهذا بدوره يعني أن أحد العنصرين y,x ، على الأقل ، ينتمي إلى I . إذن المثالية I مثالية أولية في الحلقة $(R,+,.)$.

14- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما ، أثبت صحة ما يلي :

(1) المثالية اليسارية I عديمة القوى في الحلقة $(R,+,.)$ إذا ، وفقط إذا ، وُجِدَ عدد طبيعي n بحيث $I^n = 0$.

(2) كل مثالية يسارية معدومة القوى تكون عديمة .

(نقول عن المثالية I إنها عديمة إذا كان كل عنصر من I هو عنصر عديم القوى ، ونقول عن المثالية اليسارية I في R إنها معدومة القوى ، إذا وُجِدَ عدد طبيعي n يحقق $x_1.x_2...x_n = 0$ لكل $x_i \in I$ و $1 \leq i \leq n$.

البرهان :

(1) لنبرهن أولاً ، على وجود العدد الطبيعي n بحيث يكون $I^n = 0$ ، بفرض أن المثالية اليسارية I معدومة القوى ، وهذا يعني أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $a_1.a_2...a_n = 0$ ، لكل $a_i \in I$ و $1 \leq i \leq n$.

ليكن $b \in I^n$ ، عندئذ يكون $b = \sum x_{i1}.x_{i2}.....x_{in} = 0$ ، حيث أن $x_{ij} \in I$ لكل

، $1 \leq j \leq n$ ، ومنه يكون $I^n = 0$.

لنبرهن الآن كفاية الشرط ، نفرض أنه يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون $I^n = 0$ ، وليكن $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ عندها يكون $a_1, a_2, \dots, a_n \in I^n = 0$. وهذا يعني أن المثالية اليسارية I معدومة القوى .

(2) لتكن J مثالية يسارية معدومة القوى في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وهذا يؤدي إلى وجود عدد طبيعي n يكون من أجله $J^n = 0$ ، من ناحية ثانية ، إذا كان $x \in J$ ، عندها يكون : $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \in J^n = 0$ ، أي أن كل عنصر من المثالية اليسارية J هو عنصر عديم القوى ، إذن المثالية اليسارية J عديمة .

15- بداية هذا التمرين ، نذكر القارئ الكريم بمفهوم الجسم .

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، نقول عن هذه الحلقة إنها جسم (Skew - Field) إذا كان $0 \neq 1$ وكل عنصر من الحلقة R مغايراً للصفر يملك معكوس ، ونسمي كل جسم إبدالي حقل .

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر ، وكان e عنصراً جامد من R ولا يساوي الصفر ، عندها الشروط التالية متكافئة :

(1) المثالية اليسارية $R.e$ أصغرية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(2) الحلقة $e.R.e$ جسم .

البرهان :

(2) \Leftrightarrow (1)

بفرض أن المثالية اليسارية $R.e$ أصغرية في الحلقة R ، ونعلم أن $e.R.e$ هي حلقة إبدالية بمحايد e هو العنصر المحايد فيها) . وإذا كان $e.r.e \in e.R.e$ لا يساوي الصفر ، عندها يكون $R.e.r.e$ مثالية يسارية في الحلقة R لا تساوي الصفر ، كما أن $R.e.r.e \subseteq R.e$ ، وبما أن المثالية اليسارية $R.e$ أصغرية ، يكون $R.e.r.e = R.e$ ، وبما أن $e \in R.e = R.e.r.e$ ، فإنه يوجد عنصر x من R بحيث $e = x.e.r.e$ ، كما أن :

$$e = e.e = e(x.e.r.e) = e(x.e^2.r.e) = (e.x.e)(e.r.e)$$

وبما أن $e.x.e \in e.R.e$ ، نجد أن العنصر $e.r.e$ قابل للعكس من اليسار في $e.R.e$ ، وبالتالي تكون الحلقة $e.R.e$ جسم .

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

لنفرض الآن أن الحلقة $e.R.e$ جسم ، ولنبرهن أن المثالية اليسارية $R.e$ أصغرية ، لتكن I مثالية يسارية لا تساوي الصفر في الحلقة $(R, +, \cdot)$ حيث $I \subseteq R.e$ ، عندها يكون $e.I \neq 0$ ، لأنه إذا كان $e.R = 0$. فإن :

$$R^2 = R.R \subseteq (R.e)R = R(e.R) = 0$$

وهذا يبين لنا أن المثالية اليسارية I معدومة القوى ، وبالتالي يوجد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية معدومة القوى ، وهذا مناقض للفرض ، إذن $e.I \neq 0$ ، ومنه يوجد عنصر وليكن x من I بحيث يكون $e.x \neq 0$ ، وبما أن $x \in I \subseteq R.e$ ، يوجد عنصر a من R بحيث $x = a.e$ ، وبالتالي يكون لدينا :

$$0 \neq e.x = e.a.e = (e.a.e).e = e(a.e).e = e.a.e \in e.R.e$$

وبما أن $e.R.e$ جسم ، فإن العنصر $e.x$ قابل للعكس في الحلقة $e.R.e$ ، أي أنه يوجد العنصر $e.y.e \in e.R.e$ حيث : $(e.y.e)(e.x) = e$.

كما أن :

$$e = (e.y.e)(e.x) = (e.y.e)x \in R.x \subseteq R I \subseteq I$$

وهذا يبين لنا أن المثالية اليسارية $R.e$ أصغرية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

16- إذا كانت $(Z, +, \cdot)$ حلقة تامة ، حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، أثبت أن $(Z, +, \cdot)$ حلقة إقليدية .

الحل :

لنعرف الدالة الإقليدية d بالشكل : $d(n) = |n|$ حيث n عدد صحيح مختلف عن الصفر .

ليكن n_2, n_1 عددين صحيحين مختلفين عن الصفر ، بحيث أن n_1 يقسم n_2 في Z ، وبالتالي يوجد عدد صحيح n_3 مختلف عن الصفر بحيث يكون : $n_2 = n_1.n_3$ ،

ومنه يكون :

$d(n_2) = |n_2| = |n_1 \cdot n_3| = |n_1| \cdot |n_3| \geq |n_1| = d(n_1)$
 إذن الشرط الأول محقق ، وإذا كان m_1 و $m_2 \neq 0$ عددين صحيحين ، فإنه استناداً إلى نظرية التقسيم الخوارزمي ، يوجد عدنان صحيحان r, q ، بحيث يكون :
 $m_1 = q \cdot m_2 + r$ ، لكل $0 \leq r < |m_2|$ ، أي لكل $m_1 = q m_2 + r$ و إما أن يكون صفرأ ، أو أن يكون $d(r) \leq d(m_2)$.
 نستنتج مما سبق أن $(Z, +, \cdot)$ حلقة إقليدية .

17- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تحليل وحيد ، صفرها هو 0 ، وإذا كان y, x عنصرين مغايرين للصفر من R ، أثبت أن لـ y, x قاسماً مشتركاً أعظم في R .
 الحل :

بما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تحليل وحيد و y, x عنصرين مغايرين للصفر في R ، فإن y, x يمكن كتابتهما بالشكل :

$$x = u \cdot P_1^{S_1} \cdot P_2^{S_2} \dots \dots \dots P_n^{S_n}$$

$$y = v \cdot P_1^{t_1} \cdot P_2^{t_2} \dots \dots \dots P_n^{t_n}$$

حيث أن u, v عنصران قابلان للعكس في R ، و P_1, P_2, \dots, P_n عناصر من الحلقة R ، و S_i و t_i أعداد صحيحة غير سالبة و $1 \leq i \leq n$ و P_{i_1} و P_{i_2} ليسا مترادفين في الحلقة R ، وذلك من أجل أي i_1 و i_2 من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$.
 $i_1 \neq i_2$.

ليكن $d = P_1^{r_1} \cdot P_2^{r_2} \dots \dots \dots P_n^{r_n}$ حيث أن :

$$r_i = \min(S_i, t_i) ; 1 \leq i \leq n$$

ولنثبت أن d هو قاسم مشترك أعظم لـ y, x في R .

بما أن $x = u \cdot P_1^{S_1} \cdot P_2^{S_2} \dots \dots \dots P_n^{S_n}$ ، فإن :

$$x = u \cdot P_1^{r_1} \cdot P_1^{S_1-r_1} \cdot P_2^{r_2} \cdot P_2^{S_2-r_2} \dots \dots \dots P_n^{r_n} \cdot P_n^{S_n-r_n}$$

$$= u \cdot P_1^{S_1-r_1} \cdot P_2^{S_2-r_2} \dots \dots \dots P_n^{S_n-r_n} \cdot P_1^{r_1} \cdot P_2^{r_2} \dots \dots \dots P_n^{r_n}$$

$$= u \cdot P_1^{S_1-r_1} \cdot P_2^{S_2-r_2} \dots \dots \dots P_n^{S_n-r_n} \cdot d$$

وهذا يبين لنا أن d يقسم x في R .

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن d يقسم y في R . لنبرهن الآن على تحقق الشرط الثاني الوارد في تعريف القاسم المشترك الأعظم.

إذا وُجِدَ قاسم مشترك آخر وليكن d_1 لـ y, x في R ، فإنه يمكن كتابته بالشكل :

$$d_1 = \alpha q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}$$

حيث أن α عنصر قابل للعكس في الحلقة R ، و q_i عناصر من R ، وكل منها غير قابل للتحليل و $1 \leq i \leq n$ و $m_i \in \mathbb{Z}^+$ و q_{i_2}, q_{i_1} ليسا مترادفين في R ، وذلك من أجل أي i_1, i_2 من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ ، $i_1 \neq i_2$ ، ومن ثم، فإن كلاً من العناصر q_1, q_2, \dots, q_n يقسم x في R وبالتالي تكون العناصر q_1, q_2, \dots, q_n تقسم على الأقل، أحد العناصر P_1, P_2, \dots, P_n في R . وبالتالي فإن كلاً من العناصر q_1, q_2, \dots, q_n هو مرادف لأحد العناصر P_i في R و $1 \leq i \leq n$ وهذا يبين لنا أنه يمكن كتابة العنصر d_1 بالشكل :

$$d_1 = \beta P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2} \dots P_n^{k_n}$$

حيث أن β عنصر قابل للعكس في A و $k_i \in \mathbb{Z}^+$ و $1 \leq i \leq n$ ، وبما أن d_1 يقسم كلاً من y, x في R ، وكلاً من العناصر P_i ، حيث $1 \leq i \leq n$ غير قابلة للتحليل في R و P_{i_2}, P_{i_1} ليسا مترادفين في R ، وذلك من أجل أي i_1, i_2 من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ و $i_1 \neq i_2$ ، فإن $k_i \leq S_i$ و $k_i \leq t_i$ حيث $1 \leq i \leq n$. إذن $k_i \leq \min(t_i, S_i)$ حيث $1 \leq i \leq n$ ، وبالتالي فإن d_1 يقسم d في R .

نستنتج مما سبق أن d هو قاسم مشترك أعظم لـ y, x في الحلقة R .

18- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، و I مثالية يسارية في R ، أثبت صحة تكافؤ

الشروط التالية :

(1) المثالية اليسارية I ، هي حد مباشر للحلقة R .

(2) يوجد في الحلقة R عنصر جامد وليكن e حيث $I = R \cdot e$.

الحل :

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

بما أن I هي حد مباشر للحلقة R ، فيوجد في R مثالية يسارية ولتكن J بحيث يتحقق $R = I \oplus J$. ومنه يكون : $1 = a + b$ حيث $a \in I$ و $b \in J$ ومنه $a = a^2 + a.b$:

$$a - a^2 = a.b \in I , a - a^2 = a.b \in J$$

وبالتالي يكون : $a - a^2 \in I \cap J = 0$ أي أن $a = a^2$ ، وهذا يعني أن a هو عنصر جامد في الحلقة R ، وأن $a \in I$ ، ومنه $R.a \subseteq I$.

ليكن $x \in I$ ، عندئذٍ $x = x.a + x.b$ ، وبالتالي فإن :

$$x - x.a = x.b \in I, J$$

أي أن : $x - x.a \in I \cap J = 0$ ، وبالتالي : $x = x.a \in R.a$ ، إذن : $I \subseteq R.a$.

نستنتج مما سبق أن : $I = R.a$.

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

إذا كان e عنصراً جامداً في R حيث $I = R.e$ ، عندها يكون $R = R.e \oplus R(1 - e)$. لأن $(1 - e)$ مثالية يسارية في R ، كما أن $R.e + R(1 - e) \subseteq R$. من ناحية ثانية ، لكل $x \in R$ يكون $x = x.e + x(1 - e)$ ، وبالتالي :

$$R \subseteq R.e + R(1 - e)$$

إذن : $R = R.e + R(1 - e)$.

ليكن $b \in R.e \cap R(1 - e)$ ، عندئذٍ $b = r.e = r_0(1 - e)$ ، حيث $r, r_0 \in R$ ، وبالتالي ، فإن :

$$b.e = r . e^2 = r_0(1 - e).e$$

$$= r.e = r_0.e - r_0 e^2 = r.e = r_0.e - r_0 e = 0$$

$$\Rightarrow b = b.e = 0$$

نستنتج مما سبق أن $R = R.e \oplus R(1 - e)$. إذن المثالية اليسارية I حد مباشر في الحلقة R .

19- لتكن $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in Z \right\}, +, \cdot \right)$ حلقة. أثبت أن $P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in Z \right\}$ مثالية في R ولكنها ليست أولية.

الحل :

إذا كان

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in Z \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b, c \in Z \right\}$$

مثاليتين في R ، وأن :

$$A \cdot B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a.b + b.c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in Z \right\} \subseteq P$$

بينما $A \not\subseteq P$ و $B \not\subseteq P$. إذن P ليست مثالية أولية في R .

20- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد، وإذا كانت الحلقة R تملك مثالية أعظمية وحيدة، فإن العناصر الجامدة فيها، هي فقط صفر الحلقة وواحد 0 و 1 .

الحل :

ليكن $a \in R$ عنصراً جامداً، حيث $0 \neq a \neq 1$ ، وكون a عنصراً جامداً، فإن $a^2 = a$ أي أن $a(1-a) = 0$ ، إذن لكل من a و $1-a$ قواسم للصفر في الحلقة R ، إذن كل منهما غير معكوس في R وعليه، فإن كلا من $\langle a \rangle$ و $\langle 1-a \rangle$ مثالية حقيقية في R . إذن $\langle a \rangle \subseteq I$ و $\langle 1-a \rangle \subseteq I$ حيث I مثالية أعظمية في R ، وبما أن I مثالية أعظمية وحيدة في R ، فإن $a \in I$ ، $1-a \in I$ ، أي أن $1 = (1-a) + a \in I$ ، وهذا غير ممكن لأن $I \neq R$ ، وعليه

يكون 0 و 1 هما العنصران الجامدان الوحيدان في R .

21- إذا كانت الحلقة (Z_6, \oplus, \otimes) ، أوجد عناصر الوحدة والعناصر المترادفة في Z_6 .

الحل :

لدينا زمرة عناصر الوحدة في الحلقة (Z_6, \oplus, \otimes) هي (G_R, \oplus) حيث أن $G_R = \{1,5\}$. من العلاقتين التاليتين :

$$3 = 3 \otimes 1 , 4 = 2 \otimes 5$$

نجد أن العنصر 4 يترادف مع العنصر 2 ، وأن العنصر 3 يترادف مع نفسه .

22- لتكن الحلقة $(Z[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ، أثبت أن العنصر $a = 9 + 5\sqrt{2} \in Z[\sqrt{2}]$ يترادف مع العنصر $b = 1 + 4\sqrt{2}$ في هذه الحلقة .

الحل :

لدينا أولاً :

$$u = \frac{a}{b} = \frac{(9 + 5\sqrt{2}) \cdot (1 - 4\sqrt{2})}{(1 + 4\sqrt{2}) \cdot (1 - 4\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-31 - 31\sqrt{2}}{-31} = 1 + \sqrt{2} \in Z[\sqrt{2}]$$

وبما أن $u = 1 + \sqrt{2}$ عنصر وحدة في الحلقة $(Z[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ، لأن :

$$u^{-1} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2} \in Z[\sqrt{2}]$$

وبالتالي ، نرى أن العنصرين $9 + 5\sqrt{2}$ و $1 + 4\sqrt{2}$ مترادفان .

23- لتكن $(Z[\sqrt{-3}], +, \cdot)$ حلقة ، أثبت أن العنصر $P = \sqrt{-3}$ ، غير أولي في هذه الحلقة .

الحل :

ليكن x, y عنصرين ما من $Z[\sqrt{-3}]$ ، عندها يمكن كتابة :

$$x = a + b\sqrt{-3} , y = c + d\sqrt{-3}$$

لنعرف الآن أن : $P|x.y$ ، أي أن $x.y = P.k$ حيث $k \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ، أي أن $k = s + t\sqrt{-3}$. وبالتالي يمكن كتابة :

$$(a + b\sqrt{-3}).(c + d\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}(s + t\sqrt{-3})$$

ومنه نجد :

$$(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = 3(s^2 + 3t^2) \Rightarrow$$

$$3/(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) \Rightarrow 3/3a^2d^2 + 3b^2c^2 + 9b^2d^2$$

ومنه $3/a^2c^2$ ، ومن كون 3 عدداً أولياً في \mathbb{Z} ، فإما $3/a^2$ أو $3/c^2$ ويكون $3/a$ أو $3/c$. لنفرض أن $3/a$ ، وبما أن $(\sqrt{-3}).(\sqrt{-3}) = 3$ فإن $\sqrt{3}/a$. إذن $x = a + b\sqrt{-3}$ يقبل القسمة على $\sqrt{-3}$ أي أن $P = \sqrt{-3}$ عنصر غير أولي في الحلقة المدروسة .

24- أثبت من خلال مثال أن عكس المبرهنة : إذا كانت $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حلقة تامة ، فإن أي عنصر أولي فيها ، هو عنصر غير قابل للتحويل ، ليس صحيحاً بشكل عام .
الحل :

لنأخذ الحلقة التامة $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}], +, \cdot)$ وليكن العنصر $P = 1 + \sqrt{-5}$ منها غير قابل للتحويل فيها ، ولنثبت أنه غير أولي .
بما أن :

$$2.3 = 6 = (1 + \sqrt{-5}).(1 - \sqrt{-5}) = P(1 - \sqrt{-5})$$

وإذا فرضنا أن P عدد أولي ، يكون إما $P/2$ أو $P/3$ في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ فإذا كان $P/2$ ، أي أن $2 = d.P$ ، وبأخذ :

$$|a + b\sqrt{-5}| = a^2 + 5b^2$$

وباستخدام العلاقة $|a.b| = |a|.|b|$ حيث a, b من $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ، ومن العلاقة $2 = d.P$ ، يكون لدينا :

$$4 = |2| = |d| \cdot |P| = 6 |d|$$

وهذا غير ممكن . بالطريقة نفسها نجد أن $P/3$ غير ممكن أيضاً . إذن P عدد غير أولي .

25- أثبت أن الحقل $(F, +, \cdot)$ هو حلقة إقليدية .

الحل :

إن $(F, +, \cdot)$ حلقة تامة ، كما ويمكن إيجاد دالة إقليدية من الشكل $d : F^* \rightarrow N$ معرفة بالشكل : $d(x) = 1 ; x \in F^*$ عندها يتحقق ما يلي :

$$1- d(x) \geq 0 \text{ ، لكل } x \text{ من } F^* .$$

$$2- \text{ لكل } x, y \text{ من } F^* \text{ ، فإن } x \cdot y \neq 0 \text{ ، ويكون } d(x \cdot y) = 1 = d(x) \cdot d(y) .$$

$$3- \text{ إذا كان } a, b \in F \text{ ، وكان } b \neq 0 \text{ ، فإن } a = (a \cdot b^{-1}) \cdot b + 0 .$$

إذن $(F, +, \cdot)$ حلقة إقليدية .

26- لتكن الحلقة $(Z[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ، أثبت أنها تشكل حلقة إقليدية .

الحل :

إن الحلقة $R = (Z[\sqrt{3}], +, \cdot)$ حلقة تامة . الدالة الإقليدية : $d : R^* \rightarrow N$ المعرفة بالشكل : $d(a + b\sqrt{3}) = |a^2 - 3b^2|$ حيث $x = a + b\sqrt{3} \in R^*$ تحقق الشروط التالية :

$$(1) d(x) \geq 0 \text{ لكل } x \in R^*$$

$$(2) \text{ لكل } x, y \in R^* \text{ يكون لدينا :}$$

$$d(x) = d(x) \cdot 1 \leq d(x) \cdot d(y) = d(x \cdot y)$$

$$(3) \text{ إذا كان } y, x \text{ من } R \text{ ، فإن } 0 \neq y \text{ ، ويكون لدينا } \frac{x}{y} = c + d\sqrt{3} \text{ ،}$$

$$\text{ لكل } c, d \text{ من } Q \text{ . لنختار الأعداد بحيث يتحقق } |c - a| \leq \frac{1}{2} \text{ و } |d - b| \leq \frac{1}{2} \text{ ،}$$

عندها يكون :

$$\frac{x}{y} = c + d\sqrt{3} = a + b\sqrt{3} + [(c-a) + (d-b)\sqrt{3}]$$

أو :

$$x = (c + d\sqrt{3}).y = (a + b\sqrt{3}).y + [(c-a) + (d-b)\sqrt{3}].y \\ = q.y + r$$

حيث أن :

$$q = a + b\sqrt{3} , r = [(c-a) + (d-b)\sqrt{3}].y$$

$$d(r) = d([(c-a) + (d-b)\sqrt{3}].y)$$

$$= d([(c-a) + (d-b)\sqrt{3}].d(y))$$

$$= |(c-a)^2 - 3(d-b)^2|.dy \leq \left| \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right|.dy$$

$$= \frac{1}{2}d(y) < dy$$

نستنتج مما سبق أن $(Z[\sqrt{3}], +, \cdot)$ حلقة إقليدية .

27- أثبت أن العدد الأولي P في Z أولي في الحلقة $(Z(i), +, \cdot)$.

الحل :

نفرض العكس ، نفرض أن $P = P_1.P_2 \dots P_n$ ، وهو تحليل وحيد للعدد P ، على شكل عدد منته من الأعداد الأولية P_i ، حيث $1 \leq i \leq n$ ، ويكون $d(P_i) > 1$ ، وبالتالي فإن :

$$P^2 = d(P) = d(P_1) \cdot d(P_2) \dots d(P_n)$$

وبما أن Z حلقة تحليل وحيد، ينتج أن $n = 2$ و $P = P_1.P_2$ و $P = d(P_1) = d(P_2)$

وإذا كان $P_1 = a + ib$ ، فإن :

$$P = d(P_1) = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) \Rightarrow P_2 = a - ib$$

وإذا كان العدد الأولي $P \in Z$ يتحلل في $Z(i)$ ، يكون لدينا :

$$P = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

حيث أن $a + ib$ و $a - ib$ أعداد أولية في $Z(i)$ ، فمثلاً العدد $(1+i)(1-i) = 2$ غير أولي في الحلقة $Z(i)$.

28- إذا كان a عنصر ما من الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، أثبت أنه إذا كان a عنصراً ليس معدوم القوى في R ، فإنه يوجد في الحلقة R مثالية أولية لا تحوي العنصر a .

الحل :

لنأخذ المجموعة التالية :

$$M = \{ I : R \text{ مثالية في } R ; a^n \notin I ; \forall n \in \mathbb{N} \}$$

نلاحظ أن $M \neq \emptyset$ لأن $\{0\} \in M$ ، 0 هو صفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ كما أن M مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء، لأنه إذا كانت M_0 مجموعة جزئية من M وغير خالية ومرتبة كلياً، فيكون $\bigcup_{A \in M_0} A$ مثالية في R ، ويمثل حداً أعلى للمجموعة M_0 في M ، وحسب تمهيدية زورن، يوجد في M عنصراً أعظماً وليكن L ، وبالتالي، فإن L مثالية في الحلقة R ، كما أن $a^n \notin L$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، أي أن $a \notin L$.

لنبرهن الآن أن المثالية L أولية في R .

إذا كان x, y عنصرين ما من R بحيث $x \cdot y \in L$ ، ولنفرض جديلاً أن كلا من $x, y \notin L$ ، عندها يكون :

$$J = L + x \cdot R, \quad K = L + y \cdot R$$

مثالية في R ، وأن $L \subsetneq J$ و $L \subsetneq K$ ، وبما أن للمثالية L عنصر أعظمي في M ، فإن $J, K \notin M$ ، وحسب تعريف المجموعة M يوجد $n, m \in \mathbb{N}$ بحيث $a^n \in K$ و $a^m \in J$ ، وبالتالي يوجد r_1, r_2 من R و $m_1, m_2 \in L$ بحيث يكون :

$$a^m = m_2 + y \cdot r_2, \quad a^n = m_1 + x \cdot r_1$$

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m = m_1 m_2 + m_1 y \cdot r_2 + x \cdot r_1 \cdot m_2 + x \cdot y \cdot r_1 \cdot r_2 \in L$$

وهذا يناقض كون $L \in M$.

نستنتج مما سبق أنه إما $x \in L$ أو $y \in L$ ، إذن المثالية L أولية في R ، وأن $a \notin L$.

29- أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون العنصر x غير المعدوم من الحلقة التامة $(R, +, \cdot)$ أولياً، هو أن تكون المثالية $x.R$ أولية في R .

الحل :

لنفرض أولاً أن العنصر x أولي في الحلقة R ، لنبرهن أن المثالية $x.R$ أولية في R ، بما أن x أولي في R ، عندئذٍ $x.R \neq R$ لأن x عنصر غير قابل للعكس في R . إذا كان a, b عنصرين ما من الحلقة R بحيث $a.b \in x.R$ ، عندئذٍ يوجد r من R بحيث يكون $a.b = x.r$ أي أن x يقسم $a.b$. وحسب الفرض إما x يقسم a أو x يقسم b ، ولنفرض أن x لا يقسم b ، وهذا يعني أن x يقسم a وبالتالي يوجد عنصر c وليكن c من R بحيث يكون $a = c.x$. إذن $a \in x.R$ ومنه المثالية $x.R$ أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

لنبرهن على العكس ، أي لنبرهن أن العنصر x من R أولي .

لنفرض أن المثالية $x.R$ أولية في R ، وهذا يؤدي إلى أن x غير قابل للعكس في R ، لأن $x.R \neq R$ ، ليكن $a, b \in R$ حيث أن x يقسم الجداء $a.b$ ، وبالتالي يوجد d من R يحقق :

$$a.b = x.d \in x.R$$

وبما أن المثالية $x.R$ أولية ، فإن $a \in x.R$ أو $b \in x.R$ ، وبفرض أن $a \notin x.R$ ، فإن $b \in x.R$. وبالتالي يوجد $e \in R$ حيث $b = x.e$ ، أي أن x قاسم للعنصر b في R .

نستنتج مما سبق أن العنصر x أولي في الحلقة R .

6- تمارين غير محلولة للفصل الثالث

1- ليكن φ تشاكلاً ما لحققة $(R, +, \cdot)$ على حلقة ما (S, T, \star) ، عندئذ يوجد تقابل بين مجموعة كل المثاليات في الحلقة (S, T, \star) ومجموعة كل المثاليات ، التي تحوي كل منها $\text{Ker } \varphi$ ، في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

2- بين فيما إذا كان التطبيق المعرف من حلقة الأعداد الصحيحة Z إلى حلقة الأعداد الزوجية الصحيحة E ليس تشاكلاً .

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ و $(S, +, \cdot)$ حلقتين ما ، وإذا كان $\varphi : R \longrightarrow S$ تشاكلاً وإذا كانت I مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة R ، وكان φ شاملاً ، فإن $\varphi(I)$ مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة $(S, +, \cdot)$.

وإذا كانت J مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة S ، فإن $\varphi^{-1}(J)$ مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

4- أثبت أن $\varphi : Z \longrightarrow R$ المعرف بالشكل $\varphi(n) = n \cdot 1$ ، حيث n من Z هو تشاكل حلقي .

5- حقّق المبرهنة الثالثة لتمائل الحلقات ، علماً أن $R = (Z, +, \cdot)$ حلقة الأعداد الصحيحة ، والمثاليات $I = 6Z$ و $J = 2Z$.

6- لتكن A مجموعة تتألف من عنصر واحد فقط ، أثبت أن التطبيق $\varphi : P(A) \longrightarrow Z_2$ والمعرف بالشكل $\varphi(\Phi) = \bar{0}$ و $\varphi(A) = \bar{1}$ هو تشاكل حلقي بين الحلقتين $(P(A), \Delta, \cap)$ و (Z_2, \oplus, \otimes) .

7- لتكن $R = (M_2(R), +, \cdot)$ حلقة المصفوفات المربعة الحقيقية من الدرجة الثانية ، والتي لها الشكل :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$$

ولتكن C حلقة الأعداد المركبة . أثبت أن التطبيق $\varphi : C \longrightarrow R$ والمعرف

بالشكل : $\varphi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ، يشكل تماثلاً حقيقياً .

8- إذا كان φ تشاكلاً شاملاً من الحلقة $(R, +, \cdot)$ في الحلقة $(S, +, \cdot)$ ، ولتكن I مثالية في R ، وإذا كانت J مثالية في R ، أثبت أن $R/\varphi^{-1}(J) \cong S/J$.
وإذا كان $B \leq S$ ، فإن :

$$\varphi^{-1}(B)/\text{Ker}\varphi \cong B$$

9- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة مثاليات رئيسية ، وإذا كان العنصر a من R أولياً مع كل من العنصرين b, c من R ، أثبت أن a أولي مع $b.c$.

10- مستفيداً من عملية التقسيم الإقليدي أوجد القاسم المشترك الأعظم d للعددين 118 و 26 ، ثم أوجد العددين n, m ، اللذين يحققان العلاقة : $d = 26m + 118n$.

11- اكتب العدد 1 كتركيب خطي للعددين الأوليين معاً 8 و 27 .

12- بفرض أن d هو القاسم المشترك الأعظم للعددين k, n و m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين n, k ، وإذا كانت $(Z, +, \cdot)$ حلقة المثاليات الرئيسية ، أثبت أن :

$$nZ \cap kZ = mZ$$

$$nZ + kZ = dZ$$

تطبيق : أوجد

$$8Z \cap 6Z , 3Z \cap 2Z$$

$$8Z + 6Z , 3Z + 2Z$$

13- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية واحدية ، وإذا كانت $R \neq I$ مثالية ، أثبت أن المثالية الأعظمية I هي مثالية أولية في الحلقة R .
14- أثبت أن التطبيق المعرف بالشكل التالي :

$$\varphi : R \longrightarrow F$$

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

هو تماثل من حلقة الأعداد الحقيقية $(R, +, \cdot)$ إلى حلقة المصفوفات

$$\cdot \left(F = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, +, \cdot \right)$$

15- بفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، ولنرمز لصفرها بـ 0 ، وإذا كان $a \neq 0$ عنصراً ما من R ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية (a) مثالية أولية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هو أن يكون العنصر a غير قابل للتحليل في R أو قابلاً للعكس .

16- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت I مثالية يسارية في R بحيث $R \neq I$ ، أثبت أنه يوجد في الحلقة $(R, +, \cdot)$ مثالية يسارية أعظمية تحوي I .

17- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، لا تحوي مثاليات معدومة القوى مغايرة للصفر ، وإذا كان e عنصر جامد مغاير للصفر في الحلقة R . أثبت أن الشروط التالية متكافئة :

(1) المثالية اليسارية $R.e$ أصغرية في الحلقة R .

(2) المثالية اليمينية $e.R$ أصغرية في الحلقة R .

18- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إقليدية ، وليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من R حيث 0 صفر الحلقة R ، ولنفرض أن b غير قابل للعكس في R . أثبت أن $d(a) < d(a.b)$.

19- لتكن (Z_6, \oplus, \otimes) حلقة ، وإذا كان $P = \langle \bar{3} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{3} \}$.

أثبت أن P مثالية في Z_6 ، وأنها أولية . وإذا كانت (Z_8, \oplus, \otimes) ، وإذا كانت $I = \langle 4 \rangle$. أثبت أن I مثالية في R ، ولكنها ليست أولية .

20- إذا كانت $(2Z, +, \cdot)$ حلقة ، وليكن $I = \langle 4 \rangle$ ، أثبت أن I مثالية أعظمية في $2Z$ ، ولكنها ليست أولية .

21- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، عندها العبارات التالية متكافئة من أجل a, b, c من R :

(1) $a|b$ و $b|a$.

$$(2) \quad a = u.b \text{ ، حيث } u \text{ عنصر وحدة في } R .$$

$$(3) \quad \langle b \rangle = \langle a \rangle .$$

22- لتكن $(Z(i), +, \cdot)$ حلقة غاوص الصحيحة ، أوجد عناصر الوحدة والعناصر المترادفة في هذه الحلقة .

23- أثبت أن العنصر $P = 1 + i$ غير قابل للتحويل في الحلقة $(Z(i), +, \cdot)$.

24- لتكن الحلقة $(Z[\sqrt{-5}], +, \cdot)$ ، برهن أن العنصر $P = 1 + \sqrt{-5}$ غير قابل للتحويل في الحلقة $(Z[\sqrt{-3}], +, \cdot)$.

25- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة، وإذا كانت $P \neq 0$ عنصر منها، وليس عنصر وحدة فيها، أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(1) P عنصر غير قابل للتحويل .

(2) إذا كان $d|P$ ، إما $d \sim 1$ أو $d \sim P$ (علاقة ترادف) .

(3) إذا كان $P = a.b$ في R ، فإنه إما $P \sim a$ أو $P \sim b$.

(4) إذا كان $P \sim a.b$ في $P \sim a$ ، فإن $P \sim a$ أو $P \sim b$.

26- بين فيما إذا كانت الحلقة $(Z[\sqrt{-5}], +, \cdot)$ حلقة تحليل وحيد .

27- أثبت أن حلقة أعداد غوص الصحيحة $(Z(i), +, \cdot)$ تشكل حلقة إقليدية .

إرشاد للحل : خذ الدالة الإقليدية $d : Z^*(i) \rightarrow N$ المعرفة بالشكل :

$$d(x) = a^2 + b^2 ; x \in Z^*(i)$$

28- من المعلوم أن $Q(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} ; a, b \in Q\}$ تشكل حقلاً ،

بالنسبة للعمليات $(+)$ و (\cdot) العاديتين ، المطلوب أثبت أن $Q(\sqrt{2}) \neq Q(\sqrt{5})$.

29- إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، أثبت أن رتب جميع العناصر غير الصفرية في

الزمرة $(F, +)$ متساوية .

30- حدّد مميز الحقول التالية : Q, R, C, Z_2, Z_3 .

31- نذكر بأن المثالية I في الحلقة $(R, +, \cdot)$ يكون خاصاً ، إذا كان مختلفاً عن

{0} وعن R، أثبت أن أي حقل لا يحوي مثاليات خاصة .

ثم أثبت أن الشرط اللازم والكافي لتكون الحلقة الواحدة الإبدالية $(R, +, \cdot)$ حقلاً ، هو ألا تملك مثاليات خاصة .

$$32- \text{أثبت أن المجموعة : } F = \{a + b\sqrt{13} ; a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$$

تشكل حقلاً جزئياً من الحقل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

33- إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً مميزه P حيث P عدد أولي ، أثبت أن التطبيق الذي

يقابل العنصر $a \in F$ بالعنصر $a^P \in F$ هو تشاكل .

34- لتكن F هي مجموعات المصفوفات من $M_2(\mathbb{R})$ ، لها الشكل:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}$$

، أثبت أن $(F, +, \cdot)$ تشكل حقلاً .

35- لتكن الحلقتان $R = (2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ و $R' = (3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (أي أن R تتكون من كل

مضاعفات العدد 2 ، وتتكون R' من كل مضاعفات 3) ، بيّن أن R ليست متشاكله تقابلياً مع R' .

36- نقول عن العنصر $b \in \mathbb{R}$ إنه مشارك لـ $a \in \mathbb{R}$ ، إذا كان $b = u.a$ ، من

أجل عنصر وحدة u من R ، حيث $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ، حلقة ، المطلوب أوجد العناصر المشاركة للعدد 4 في الحلقة \mathbb{Z}_{10} . ثم أوجد العناصر المشاركة للعدد 5 في الحلقة \mathbb{Z}_{10} .

عبر عن العدد 12 في الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، كجداء لعناصر غير قابلة للتحليل .

37- بفرض أن $\varphi: F \longrightarrow F'$ تشاكلاً من حقل F إلى حقل F' ، بيّن أن φ

تطبيق متباين .

38- أثبت أن العدد الأولي P في Z يكون أولياً في الحلقة $(\mathbb{Z}(i), +, \cdot)$ ، إذا ،

$$\text{و فقط إذا ، } P = 4k - 1 .$$

39- ليكن العنصر u من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. أثبت أن العنصر u يمكن كتابته

على شكل مجموع مربعي عددين b, a من Z ، إذا ، فقط إذا ، أمكن تحليل u إلى

جداء أعداد أولية يكون كل عدد بسيط $P = 4k - 1$ على شكل قوى زوجية .

40- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت $M \neq R$ مثالية في الحلقة R . أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية M أعظمية في R هو أن يتحقق الشرط التالي :

$$\forall m \in M \Rightarrow \exists x \in R : 1 - x.m \in M$$

41- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، أثبت صحة ما يلي :

- (1) $J(R)$ مثالية يسارية (يمينية) صغير في الحلقة R .
- (2) الشرط اللازم والكافي كي تكون المثالية اليسارية N في R صغيراً في R هو أن يكون : $N \subseteq J(R)$.
- (3) إذا كانت I مثالية يسارية (يمينية) صغيراً في الحلقة $(R, +, \cdot)$ و J مثالية يسارية (يمينية) في الحلقة R حيث $J \subseteq I$ ، فإن J تكون صغيراً في الحلقة R .

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل الرابع :

حلقة كثيرات الحدود

Ring of polynomials

7- تمارينات محلولة للفصل الرابع

- حلقة كثيرات الحدود -

(1) بفرض أن :

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 2 \in Z_3[x]$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1 \in Z_3[x]$$

أوجد : $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) + g(x)$.

الحل :

$$f(x) + g(x) = (2 + 0)x^3 + (1 + 2)x^2 + (2 + 2)x + (2 + 1)$$

$$= 2x^3 + 0x^2 + 1x + 0 = 2x^3 + x \in Z_3[x]$$

$$f(x) \cdot g(x) = x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x + 2$$

$$= x^5 + 2x^3 + 2$$

(2) أوجد ناتج قسمة كثيرة الحدود $f(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 \in Z_5[x]$

على كثيرة الحدود : $g(x) = x^2 + 4x + 2 \in Z_5[x]$ ، ثم أوجد باقي

القسمة .

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ \hline x^2 + 4x + 2 \quad \overline{) \quad 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1} \\ \underline{3x^4 + 2x^3 + x^2} \\ 4x^3 + x^2 + 1 \\ \underline{4x^3 + x^2 + 3x} \\ 2x + 1 \end{array}$$

نلاحظ من عملية القسمة السابقة، أن ناتج القسمة $f(x)/g(x)$ هو $3x^2 + 4x$

والباقي هو $2x + 1$ ، وذلك في الحلقة $Z_5[x]$.

إذن :

$$3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 4x + 2)(3x^2 + 4x) + 2x + 1$$

(3) في الحلقة $Z_3[x]$ ، أثبت أن : $x^4 + x$ و $x^2 + x$ تحدد نفس الدالة من Z_3

إلى Z_3 .

الحل :

لنضع : $f(x) = x^4 + x$ ، $g(x) = x^2 + x$ ، عندها يكون لدينا :

$$f(0) = 0 = g(0) , f(1) = 2 = g(1) , f(2) = 0 = g(2)$$

وذلك في الحلقة $Z_3[x]$.

(4) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة محايد ، ولتكن $x = (0, 1, 0, \dots)$ كثيرة حدود ،

أثبت ما يلي :

1- $x^n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ (أي الحد الذي ترتيبه $n + 1$ في كثيرة الحدود x^n

يساوي الواحد وجميع الحدود الأخرى تساوي الصفر) .

2- إذا كانت $(S, +, \cdot)$ حلقة كثيرات الحدود على الحلقة R ، فإن أي عنصر

$f \in S$ ، حيث : $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ ، يكتب بالشكل :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

الحل :

1- بطريقة الاستنتاج الرياضي على n نبرهن :

إذا كان $n = 1$ ، فإن $x^1 = x = (0, 1, 0, \dots)$ ، حسب الفرض العلاقة محققة .

لنفرض الآن أن العلاقة محققة من أجل $n = m$ ، ولنبرهن على صحتها من أجل

$m + 1$.

لدينا $x^m = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ ، وبما أن :

$$x^{m+1} = x^m \cdot x = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) (0, 1, 0, \dots)$$

$$= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

أي أن الحد الذي ترتيب موضعه $m + 2$ في كثيرة الحدود يساوي 1 ، وجميع

الحدود الأخرى تساوي الصفر ، وبالتالي فالعلاقة محققة من أجل $n = m + 1$ ،

وبالتالي فهي صحيحة لجميع عناصر n من Z^+ .

2- لتكن $f = (a_0, a_1, \dots) \in S$ ، وبالتالي يكون :

$$\begin{aligned} f &= (a_0, a_1, \dots) \\ &= (a_0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \dots + (0, 0, \dots, a_n, 0, \dots) \\ &= (a_0, 0, \dots) (1, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) (0, 1, 0, \dots) + \dots + \\ &\quad + (0, 0, \dots, a_n, 0, \dots) (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{aligned}$$

(5) ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة وإشارة (×) أمام العبارة الخاطئة

في الجمل التالية :

- 1- كثيرة الحدود $(x - 2)$ غير قابلة للتحليل على الحلقة Q (✓)
- 2- كثيرة الحدود $(x^2 - 3)$ غير قابلة للتحليل على الحلقة Q (✓)
- 3- كثيرة الحدود $(x^2 + 3)$ غير قابلة للتحليل على الحلقة Z_7 (×)
- 4- كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة n بمعاملات من الحقل $(F, +, \cdot)$ تحتوي على الأكثر n جذراً في الحقل F (✓)
- 5- كل كثيرة حدود $f(x)$ من الدرجة الأولى في الحلقة $(F[x], +, \cdot)$ يكون لها جذر واحد على الأقل في F (✓)
- 6- كثيرة الحدود $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ تساوي الصفر، إذا وفقط، إذا كانت $a_i = 0$ ، لكل $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (✓)
- 7- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية، فإن $(R[x], +, \cdot)$ حلقة إبدالية أيضاً (✓)
- 8- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة، فإن $(R[x], +, \cdot)$ حلقة تامة (✓)
- 9- إذا حوت الحلقة $(R, +, \cdot)$ قواسم للصفر، فإن الحلقة $(R[x], +, \cdot)$ تحوي قواسم للصفر (✓)
- 10- إذا كانت f و g كثيرتي حدود من $R[x]$ ، ودرجة $f(x)$ تساوي 3 ودرجة

(×) $R[x]$ في $g(x)$ تساوي 4 ، فإن كثيرة الحدود $f(x).g(x)$ من الدرجة 8 في $R[x]$
 11- إذا كان E حقلاً جزئياً من الحقل $(F, +, \cdot)$ ، وكان α جذراً لكثيرة الحدود
 $f(x)$ في $E[x]$ ، عندئذ يكون α جذراً لـ $h(x) = f(x).g(x)$ لكل $g(x) \in E[x]$

(✓)

12- ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً، عندئذ عنصر الوحدة في $F[x]$ هو عنصر الوحدة

(✓)

في F

13- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ، عندئذ قواسم للصفر في الحلقة $R[x]$ هي قواسم

(×)

للصفر في R

(6) أثبت أن $\deg(f(x).g(x)) < \deg f(x) + \deg g(x)$ ، حيث أن :

$$f(x) = 3x^2 + 2 , g(x) = 2x + 3$$

وذلك في الحلقة $(Z_6[x], +, \cdot)$.

الحل :

لدينا أولاً :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (3x^2 + 2)(2x + 3) = 6x^3 + 9x^2 + 4x + 6 \\ &= 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\deg(f(x).g(x)) = 2 < \deg f(x) + \deg g(x) = 2 + 1 = 3$$

(7) لتكن الحلقة $(Q[x], +, \cdot)$ ، أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ لكثيرتي

الحدود :

$$f(x) = x^4 - x^2 + x - 1 , g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

في $Q[x]$ ، ثم عبّر عنه كتركيب خطي لـ $f(x)$ و $g(x)$.

الحل :

باستخدام خوارزمية القسمة نجد :

$$f(x) = (x + 1)g(x) + (-x^2 + x)$$

$$g(x) = (-x)(-x^2 + x) + (x - 1)$$

$$-x^2 + x = (-x)(x - 1) + 0$$

إذا : $d(x) = x - 1$ (القاسم المشترك الأعظم لـ $f(x)$ و $g(x)$) . إن :

$$x - 1 = g(x) + x(-x^2 + x)$$

$$= g(x) + [f(x) - (x + 1)g(x)]$$

$$= x f(x) - (x^2 + x + 1)g(x)$$

(8) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، وليكن $f = \sum_{i=0}^l a_i \cdot x^i$ ، $g = \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^j$

كثيرتي حدود ابتدائيتين في $R[x]$ ، المطلوب :

أثبت أن $f.g$ كثيرة حدود ابتدائية في $R[x]$.

الحل :

نفرض العكس ، أي نفرض أن $f.g$ كثيرة حدود غير ابتدائية ، وهذا يؤدي إلى وجود عنصر وليكن p من R غير قابل للتحليل في R ، وبحيث يكون P يقسم جميع معاملات $f.g$ في R . ولنبرهن أن هذا لا يمكن .

بما أن f و g كثيرتي حدود ابتدائيتان في $R[x]$ ، فإن P لا يمكن أن يقسم جميع معاملات f في R ، وكذلك P لا يمكن أن يقسم جميع معاملات g في R .

لنفرض أن a_s هو أول معاملات f الذي لا يقبل القسمة على P ، حيث $0 \leq s \leq t$ ، ولنفرض أن b_q هو أول معاملات g الذي لا يقبل القسمة على P ، حيث

$$0 \leq q \leq m . \text{ وبما أن } f.g = \sum_{n=0}^{t+m} r_n \cdot x^n \text{ ، حيث أن :}$$

$$r_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j \text{ ، } r_{s+q} = \sum_{i+j=s+q} a_i \cdot b_j \text{ ; } n = 0, 1, 2, \dots, t+m$$

وبما أن P يقسم r_{s+q} ، ويقسم أيضاً ، جميع حدود الطرف الأيمن ، تي تختلف عن الحد $a_s \cdot b_q$ في R ، فإنه يجب أن يقسم $a_s \cdot b_q$ في R ، وبالتالي فإن P يجب أن يقسم أحد العنصرين a_s و b_q ، على الأقل ، في R ، وهذا مخالف للفرض أن a_s

و b_q لا يقبلان القسمة على P في R . إذن f, g كثيرة حدود ابتدائية في $R[x]$.
(9) اكتب كثيرة الحدود التالية $(x + 1)^2$ في الحلقة $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)$. ثم احسب
 $(x + 1) + (x + 1)$ في نفس الحلقة .

الحل :

$$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + (1 + 1)x + 1 = x^2 + 1$$

$$(x + 1) + (x + 1) = (1 + 1)x + (1 + 1) = 0x + 0 = 0$$

(10) ليكن التشاكل الحلقى $\Phi_2 : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالشكل التالي :

$$\Phi_2(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_n \cdot 2^n$$

المطلوب ، أوجد $\Phi_2(x^2 + x - 6)$ وماذا تستنتج .

الحل :

$$\Phi_2(x^2 + x - 6) = 2^2 + 2 - 6 = 0 \quad \text{نلاحظ أولاً :}$$

وهذا يعني أن $x^2 + x - 6$ هي نواة التطبيق Φ_2 .

بالطبع :

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

وبالتالي ، وبسبب أن $\Phi_2(x^2 + x - 6) = 0$ ، يكون لدينا :

$$\Phi_2(x - 2) = 2 - 2 = 0$$

(11) إذا كانت حلقة كثيرات الحدود على الحلقة $(R[x], +, \cdot)$ ،

وبالتالي يمكن غمر الحلقة R في $R[x]$ ، أي أنه توجد حلقة جزئية $(R_1[x], +, \cdot)$

في الحلقة $(R[x], +, \cdot)$ ، ويكون $R \cong R_1$.

الحل :

إن $R_1[x] = \{(a, 0, \dots) ; a \in R\}$ ، كما أن :

$$f - g = (a - b, 0, \dots) \in R_1$$

$$f \cdot g = (a \cdot b, 0, \dots) \in R_1$$

لكل $f = (a, 0, \dots)$ و $g = (b, 0, \dots)$ ، إذن $R_1[x] \leq R[x]$.

لنثبت الآن أن $R \cong R_1$ ، من أجل ذلك نعرّف التطبيق : $\varphi : R \longrightarrow R_1$ بالشكل

الآتي : $\varphi(a) = (a, 0, \dots)$ ، لكل a من R .

بما أن :

$$(1) \quad \varphi(a + b) = (a + b, 0, \dots) = (a, 0, \dots) + (b, 0, \dots) \\ = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$(2) \quad \varphi(a \cdot b) = (a \cdot b, 0, \dots) = (a, 0, \dots) \cdot (b, 0, \dots) \\ = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

نستنتج من (1) و (2) ولكل b, a من R إن φ تشاكل حلقي من الحلقة R إلى الحلقة $(R_1[x], +, \cdot)$ ، لنثبت أن φ شامل . من أجل كل عنصر $(a, 0, \dots)$ من $R_1[x]$ ، يوجد عنصر a من R ، بحيث يتحقق : $\varphi(a) = (a, 0, \dots)$ وهذا يعني أن التطبيق φ شامل .

أخيراً لنثبت أن φ متباين ، لنفرض أن : $\varphi(a, 0, \dots) = \varphi(b, 0, \dots)$ وبالتالي ، يكون : $(a, 0, \dots) = (b, 0, \dots)$ ، وهذا يعطي $a = b$ ، إذن التطبيق φ متباين .

نستنتج مما سبق أن φ تماثل بين الحلقتين R و $R_1[x]$. أي $R \cong R_1$.

(12) أثبت أن كثيرة الحدود $P_2(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ غير قابلة للتحليل على الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

الحل :

لنفرض العكس ، أي لنفرض أن $P_2(x)$ قابلة للتحليل على $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، وهذا يعني أنه بالإمكان إيجاد عددين a, b من \mathbb{Q} بحيث يكون : $a \cdot b = -3$ و $a + b = 0$ ، بحل جملة المعادلتين السابقتين نجد $a^2 = 3$ أي $a = \pm\sqrt{3}$ ، وهذا لا يمكن ، لأن $a = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

إذن كثيرة الحدود $x^3 - 3$ غير قابلة للتحليل على الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

(13) بيّن أي من كثيرات الحدود التالية بدائية :

$$f(x) = 15x^3 + 51x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$g(x) = 15x^3 + 6x^2 + 10 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$h(x) = 5x^4 + 25x^2 + 10x - 57 \in \mathbb{Q}[x]$$

الحل :

بما أن $c(f) = 3$ ، فإن كثيرة الحدود $f(x)$ غير بدائية .

لكن $c(g) = 1$ ، فإن كثيرة الحدود $g(x)$ بدائية .

كما أن $c(h) = 1$ ، وبالتالي فإن $h(x)$ بدائية .

(14) لتكن كثيرة الحدود $P_4(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ، المطلوب

بيّن هل يمكن تحليل كثيرة الحدود $P_4(x)$ إلى حاصل ضرب كثيرات حدود غير

قابلة للتحليل على الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

الحل :

لنكتب أولاً :

$$P_4(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

$$= x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + a.c)x^2 + (bc + ad)x + b.d$$

وبالمطابقة يكون لدينا :

$$b.d = 1 , bc + ad = 2 , a + c = 0 , b + d + ac = -3$$

بحل جملة المعادلات السابقة نجد أن :

$$b = d = \pm 1 , b(a + c) = 2$$

أي أن $a + c = \pm 2$ ، وهذا يناقض الفرض أن $a + c = 0$. إذن كثيرة الحدود ،

$P_4(x)$ غير قابلة للتحليل على $(\mathbb{Q}_4, +, \cdot)$.

(15) أوجد جذور كثيرة الحدود $P_2(x) = x^2 - 2x - 3$ في الحلقة

$(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$.

الحل :

بما أن $P_2(3) = P_2(4) = 0$ ، فإن $3, 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ جذور لكثيرة الحدود $P_2(x)$ على

$\mathbb{Z}_5[x]$.

(16) أثبت أن كثيرة الحدود $f(x)$ التالية : $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$ غير قابلة للتحليل على الحلقة $(Z_5[x], +, \cdot)$.

الحل :

نعلم أن $Z_5 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}$ ، وبما أن :

$$f(\bar{0}) = 2, f(\bar{1}) = 2, f(\bar{2}) = 4, f(\bar{3}) = 4, f(\bar{4}) = 4$$

فإن كثيرة الحدود لا تملك جذوراً في الحلقة $(Z_5[x], +, \cdot)$ ، وهذا يعني أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على Z_5 .

(17) أثبت أن $(Q[x]/\langle f \rangle, +, \cdot)$ تشكل حقلاً ، حيث أن :

$$f(x) = x^2 - 71 \in Q[x]$$

الحل :

بما أن جذور كثيرة الحدود $f(x)$ هي $x = \pm\sqrt{71}$ ، وأن درجة كثيرة الحدود $f(x)$ هي من الدرجة الثانية ، فإن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على Q ، وبالتالي فإن $\langle f \rangle$ هي مثالية أعممية في الحلقة $(Q[x], +, \cdot)$. وبالتالي فإن $Q[x] / \langle f \rangle$ تشكل حقلاً .

(18) بين فيما إذا كانت كثيرة الحدود التالية :

$$P_4(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 1 \in Z[x]$$

قابلة للتحليل على الحلقة $(Z, +, \cdot)$.

الحل :

نعلم أنه إذا كانت $P_4(x)$ قابلة للتحليل على الحلقة $(Q, +, \cdot)$ ، فهي قابلة للتحليل على الحلقة $(Z, +, \cdot)$ ، وبالتالي سيكون لها جذراً $\alpha \in Z$ حيث $\alpha/1$ ، ويكون $\alpha = \pm 1$ ، لكن لدينا :

$$P_4(1) = 8, P_4(-1) = -8$$

إذن لا يمكن تحليل كثيرة الحدود $P_4(x)$ إلى حاصل ضرب عوامل في الحلقة

. $Z[x]$

نفرض ، أن كثيرة الحدود $P_4(x)$ تتحلل في $Z[x]$ بالشكل :

$$P_4(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) ; \forall a, b, c, d \in Z$$

بفك الأقواس والمطابقة مع $P_4(x)$ نجد :

$$b.d = 1 , ad + bc = 8 , ac + b + d = -2 , a + c = 0$$

من المعادلة الأولى $b.d = 1$ نجد أن $b = d = 1$ أو $b = d = -1$ ، ومن المعادلة $ad + bc = 8$ نجد أن $d(a + c) = 8$ ، وهذا يناقض كون $a + c = 0$ ، إذن التحليل غير صحيح ، وبالتالي فإن كثيرة الحدود $P_4(x)$ غير قابلة للتحليل .

(19) لتكن $f(x), g(x) \in K[x]$ ، ولا تساويان الصفر ، وإذا كانت كثيرة الحدود

$c(x)$ هي المضاعف المشترك الأصغر لـ $f(x)$ و $g(x)$ ، عندئذ يكون :

$$c(x).K[x] = f(x).K[x] \cap g(x).K[x]$$

الحل :

لنأخذ التقاطع $f(x).K[x] \cap g(x).K[x]$ للمثاليين الرئيسيتين المولدين بـ $g(x)$ و $f(x)$ ، فتكون مثالية مغايرة للصفر ، وهذا يعني أنه توجد كثيرة حدود مثل $\varphi(x)$ بحيث يكون التقاطع السابق يساوي المثالية الرئيسة $\varphi(x).K[x]$ ، وبالتالي يكون $\varphi(x)$ المضاعف المشترك الأصغر لكثيرتي الحدود المفروضتين . وبما أن $c(x)$ المضاعف المشترك الأصغر لـ $f(x)$ و $g(x)$ نفسيهما فإن $\varphi(x) = c(x)$.

(20) لتكن كثيرة الحدود $f(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6 \in Z[x]$ ، وإذا كان

$P = 3$ أثبت أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.

الحل :

$$a_n = 1 , a_0 = 6 , a_1 = 9 , a_2 = 12$$

لدينا :

إن $P = 3$ لا يقسم $a_n = 1$ و P يقسم $9, 12, 6$ ، كما أن $P^2 = 9$ لا تقسم $a_0 = 6$ ،

فحسب معيار اينشتاين كثيرة الحدود $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$.

(21) لتكن كثيرة الحدود :

$$f(x) = \frac{5}{2}x^5 + \frac{9}{2}x^4 + 15x^3 + \frac{3}{7}x^2 + 6x + \frac{3}{14}$$

من الحلقة $(Z[x], +, \cdot)$ ، أثبت أن $f(x)$ غير قابلة للتحويل على $Q[x]$ ، علماً أن $P = 3$.

الحل :

لنأخذ كثيرة الحدود ، $h(x)$:

$$h(x) = 14 f(x) = 35x^5 + 63x^4 + 14 \cdot 15x^3 + 6x^2 + 84x + 3$$

من أجل $P = 3$ نجد أن P لا تقسم 35 و P يقسم جميع المعاملات الحقيقية ، كما أن $P^2 = 9$ لا يقسم $a_0 = 3$ ، وبالتالي حسب معيار اينشتاين ، فإن كثيرة الحدود $h(x)$ غير قابلة للتحويل في $Q[x]$ ، وبالتالي فكثيرة الحدود $f(x)$ تكون غير قابلة للتحويل في $Q[x]$.

(22) بين أي من العبارات التالية صحيحة ، وصحح العبارة الخاطئة :

1- كثيرة الحدود $f(x) = 2x^2 + 4$ غير قابلة للتحويل على Q لكنها قابلة للتحويل على Z .

2- كثيرة الحدود السابقة قابلة للتحويل على R ، وعلى C .

3- كثيرة الحدود $f(x) = x^2 - 2$ غير قابلة للتحويل على Q ، لكنها قابلة للتحويل على R .

4- كثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 1$ غير قابلة للتحويل على Z_3 ، لكنها قابلة للتحويل على Z_5 .

الحل :

العبارة الأولى (1) صحيحة .

العبارة الثانية (2) خاطئة، وتصحيحها هو : كثيرة الحدود $2x^2 + 4$ غير قابلة للتحويل على R ولكنها قابلة للتحويل على C .

العبارتان (3) و(4) صحيحتان .

(23) حسب اختبار اينشتاين ، بين أن كثيرة الحدود التالية :

$$f(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$$

غير قابلة للتحليل على Q ، اعتبر $P = 5$.

الحل :

بسبب أن 5×3 و 25×20 ، لكن 5 تقسم كلاً من $15, -20, 10$ ، وبالتالي تحققت الشروط الثلاثة الواردة في اختبار اينشتاين ، إذن $f(x)$ غير قابل للتحليل على Q .

(24) صف الحلقة $R = Z_2[x] / \langle x^3 + 1 \rangle$

الحل :

لدينا : $h(x) = x^3 + 1$ ، و $m = 3$ ، $t^3 + 1 = 0$. وبالتالي يكون :

$$R = \{a + bt + ct^2 : a, b, c \in F ; t^3 + 1 = 0\}$$

الآن $|R| = 8$ ، إن :

$$R = \{0, 1, t, t^2, 1+t, 1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2\}$$

وبما أن $\text{Char } Z_2 = 2$ يكون لدينا $1 + 1 = 0$ و $t^3 = 1$ في R ، كما أنه يمكن

كتابة في R :

$$(1+t)(1+t+t^2) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3 = 1 + 0 + 0 + 1 = 0$$

وبنفس الطريقة ، يمكن التحقق من الحالة الثانية أي بين $1 + t + t^2$ و $1 + t^2$ في

R .

8- تمرينات غير محلولة للفصل الرابع

1- لتكن :

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 3 \quad , \quad g(x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 4$$

كثيرتي حدود من الحلقة $(Z_5[x], +, \cdot)$ ، المطلوب ، احسب : $f(x) + g(x)$ و $f(x).g(x)$.

2- إذا كانت :

$$f(x) = x^3 + 2x + 4 \in Z_5[x] \quad , \quad g(x) = 3x + 2 \in Z_5[x]$$

أوجد ناتج قسمة $f(x)/g(x)$ في الحلقة $Z_5[x]$ ، ثم استنتج باقي القسمة .

3- أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ لكثيرتي الحدود :

$$f(x) = x^4 + x^3 + 3x - 9 \in Q[x]$$

$$g(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3 \in Q[x]$$

4- عبّر عن القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ لكثيرتي الحدود :

$$f(x) = x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = 2x + 1$$

في الحلقة $(Q[x], +, \cdot)$ كتركيب خطي لـ $f(x)$ و $g(x)$ في $Q[x]$.

5- ليكن التشاكل الحلقي : $\Phi_i : Q[x] \longrightarrow C$ ، والمعرف بالشكل :

$$\Phi_i(a_0 + a_1x + \dots + a_n x^n) = a_0 + a_1 i + \dots + a_n i^n \quad ; \quad \Phi_i(x) = i$$

المطلوب ، أوجد $\Phi_i(x^2 + 1)$ ، وماذا تستنتج .

6- أوجد حاصل مجموع وضرب كثيرة الحدود التالية ، وذلك في الحلقات

المشار إليها جانباً :

$$-1 \quad g(x) = 2x^2 - 4x + 2 \quad , \quad f(x) = 4x - 5 \quad , \quad \text{في الحلقة } (Z_8[x], +, \cdot)$$

$$-2 \quad g(x) = 3x^2 + 2x + 3 \quad , \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 4 \quad , \quad \text{في الحلقة}$$

$$(Z_6[x], +, \cdot)$$

في الحلقة $(Z_5[x], +, \cdot)$ ، $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ ، $g(x) = 3x^4 + 2x + 4 - 3$

7- إذا كانت $f_1(x), \dots, f_n(x) \in R[x]$ كثيرات حدود غير صفرية ، وكانت كثيرة الحدود $g(x) \in R[x]$ تقسم جداء كثيرات الحدود : $f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x)$ ، فإن $g(x)$ تقسم أحد العوامل $f_i(x)$ ، حيث $1 \leq i \leq n$.

إرشاد للحل : يُبرهن بطريقة الاستنتاج الرياضي على العدد الطبيعي n .

8- لتكن $(R_1, +, \cdot)$ حلقة إبدالية بمحايد ، ولنرمز لعنصر الوحدة فيها بالرمز 1 ولصفرها بـ 0 ، ولتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة جزئية منها بحيث $1 \in R$ ، ولنفرض أن $(R, +, \cdot)$ حلقة تامة ، ولنفرض أيضاً أن الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي حلقة كثيرات الحدود فوق R ، وليكن x مولداً لـ R_1 فوق R ، ولنفرض أيضاً ، أن :

$x_1 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \neq 0$ عنصراً من R_1 درجته بالنسبة لـ x تساوي n ($n > 0$) ، وإذا كان $f(x) = \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^j$ كثيرة حدود على R درجته m ($m \geq 0$) والمطلوب :

1- أثبت أن درجة $f(x_1)$ بالنسبة لـ x تساوي $m \cdot n$.

2- برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون x_1 مولداً لـ R_1 على R هو أن يكون $n = 1$ وأن يكون a_n قابلاً للعكس في R .

3- إذا كان x_1 مولداً لـ R_1 على R ، فإن درجة أي عنصر من R_1 بالنسبة لـ x_1 تساوي درجة العنصر نفسه بالنسبة لـ x .

9- حلّ كثيرة الحدود $P_3(x) = x^3 - 1 \in Z_5[x]$ إلى حاصل ضرب كثيرات حدود غير قابلة للتحليل في الحلقات التالية :

$$Z_5[x], Q[x], R[x], C[x]$$

10- حدّد رتبة تضاعف كثيرة الحدود التالية :

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 12$$

في الحلقة $(Z_8[x], +, \cdot)$.

11- ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وإذا كان $K \leq F$ ، ولتكن $f(x) \in K[x]$ كثيرة

حدود على الحقل K ، عندئذٍ أثبت ما يلي :

(1) يكون العنصر α من F جذراً لكثيرة الحدود $f(x)$ إذا ، فقط إذا ، كان $f(x) = (x - \alpha) g(x)$ ، حيث أن $g(x) \in K[x]$.

(2) إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون العناصر المختلفة من الحقل F : a_1, a_2, \dots, a_n جذوراً لكثيرة الحدود $f(x)$ هو أن يكون :

$$f(x) = (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n).g(x)$$

لكل $g(x) \in K[x]$.

12- إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود واحديتين ، بحيث أن كلاً منهما تقسم الأخرى ، أثبت أن $f(x) = g(x)$.

13- إذا كانت $\deg f(x) = n \geq 1$ حيث $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ، وإذا كان $a \in \mathbb{C}$ جذراً لكثيرة الحدود $f(x)$ ، فإن المرافق \bar{a} يكون أيضاً جذراً لها .

14- أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود :

$$f(x) = x^4 - x^2 + x - 1 , g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

في $Q[x]$ ، ثم عبّر عن القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ الناتج كتركيب خطي لـ $f(x)$ و $g(x)$ في الحلقة $Q[x]$.

15- لتكن كثيرة الحدود : $P_3(x) = x^3 + 3x + 2$ من $(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$. أثبت أن $f(x)$ غير قابل للتحليل على الحقل \mathbb{Z}_5 ، ثم استنتج أن $\langle f \rangle$ تشكل حقلاً .

16- أثبت أن القاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود المغايرتين للصفر $f(x)$ و $g(x)$ تتعين بشكل وحيد .

17- لتكن حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، إذا كانت $f(a) = 0$ ، حيث :

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 , a \in \mathbb{Q} ; a_0 \neq 0$$

المطلوب : أثبت أنه يوجد عدد صحيح وليكن m بحيث : $f(m) = 0$ ، وأن $m | a_0$.
تطبيق :

أثبت أن كثيرة الحدود $g(x)$ قابلة للتحليل على الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

$$g(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 6 \in \mathbb{Z}[x]$$

18- أثبت بأكثر من طريقة ، أن كثيرة الحدود $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ غير قابلة للتحويل على الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

19- لتكن $g(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ، أثبت أن $\langle g \rangle$ تشكل حقلاً .

20- مستخدماً معيار اينشتاين ، بين أي من كثيرات الحدود التالية ، قابلة للتحويل على الحقل المشار إليه جانباً :

$$(1) \quad f(x) = x^7 + 2x^3 + 12x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x] \text{ على } \mathbb{Q} .$$

$$(2) \quad g(x) = x^n - P \in \mathbb{Z}[x] \text{ ، حيث } n, P \text{ عدنان أوليان ، على } \mathbb{Q} .$$

$$(3) \quad h(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{Z}[x] \text{ ، على } \mathbb{Q} .$$

$$(4) \quad L(x) = 2x^3 + 9x - 3 \in \mathbb{Z}[x] \text{ ، على } \mathbb{Q} .$$

21- أثبت صحة النتيجة التالية :

تكون كثيرتا الحدود المغايرتان للصفير $f(x)$ و $g(x)$ أوليتين فيما بينهما ، إذا ، فقط إذا ، وُجِدَت $u(x)$ و $v(x)$ ، بحيث يكون :

$$1 = f(x).u(x) + g(x).v(x)$$

22- حدّد رتبة تضاعف الجذر α لكل من كثيرات الحدود التالية :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{Z}_6[x] \quad ; \quad \alpha = 3 \quad (1)$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x] \quad ; \quad \alpha = -1 \quad (2)$$

$$f(x) = 4x^4 - 8x^3 + x^2 - 3x + 9 \in \mathbb{Q}[x] \quad ; \quad \alpha = 3/2 \quad (3)$$

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 29 \in \mathbb{Q}[x] \quad ; \quad \alpha = 1 \quad (4)$$

23- أوجد كثيرة حدود في $\mathbb{Z}[x]$ تكون غير قابلة للتحويل على \mathbb{Q} ، لكنها قابلة للتحويل على $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2$.

24- أوجد درجة تضاعف كثيرة الحدود التالية :

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + 1 \text{ في الحلقة } (\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$$

25- لتكن $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x^4 + 3x^3 + x + 1$ ، أوجد كثيرتي الحدود $q(x)$ و $r(x)$ بحيث يكون : $g(x) = q(x).f(x) + r(x)$ و $r(x) = 0$ أو $\deg r(x) < 2 = \deg f(x)$.

26- لنفرض التطبيق $\varphi : R[x] \longrightarrow R$ بالشكل : $\varphi[f(x)] = f(x)$ ، أثبت أن φ تشاكل حلقي .

27- احسب $(1+x)^5$ في الحلقة $Z_5[x]$ ، واحسب $(1+x)^7$ في الحلقة $Z_7[x]$.

28- أوجد جذور كثيرة الحدود $f(x) = (x-4)(x-5)$ في الحلقة Z_6 ثم في الحلقة Z_7 .

29- أوجد عدد الجذور لكثيرة الحدود $x^2 - x$ في Z_4 و $Z_2 \times Z_2$ ثم في الحلقة Z_6 .

30- حدّد قيمة للعدد الأولي P ، بحيث يكون $x - 1$ عاملاً (معاملاً) لكثيرة الحدود :

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 4$$

وذلك في الحلقة $Z_P[x]$.

31- أوجد جميع كثيرات الحدود من الدرجة الثانية غير القابلة للتفليل على الحلقة Z_2 .

32- إذا كان P عدداً أولياً ، وكان $P \equiv 3 \pmod{4}$ ، أثبت أن كثيرة الحدود $x^2 + 1$ غير قابلة للتفليل على الحلقة Z_P .

33- لتكن $P(x)$ كثيرة حدود واحدة من الدرجة الرابعة في الحلقة $Z_3[x]$ ، المطلوب أوجد ستة كثيرات حدود في $Z_3[x]$ بحيث تكون $P(x)$ غير قابلة للتفليل ، إذا وفقط إذا ، كان ليس لها جذور في Z_3 .

34- حدّد قيمة العدد الأولي P ، حتى تكون كثيرة الحدود : $P(x) = x^5 + 6x^4 + 12x + 15$ غير قابلة للتفليل ، (حسب اختبار اينشتاين) ، ثم تحقق من ذلك .

35- أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود التالية :

$$f(x) = x^2 + 2 , g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1 : F = Z_5$$

$$f(x) = x^2 - x - 2 , g(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6 : F = Q$$

ثم اكتب $d(x)$ كتركيب خطي لكثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$.

36- أوجد جذور لكثيرة الحدود $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ في الحلقة $(Z_{12}, +, \cdot)$.

37- إذا علمت أن العدد 1 هو جذر لكثيرة الحدود :

$$g(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 4 \in Z_5[x]$$

والمطلوب ، باستخدام عملية القسمة المطلوبة حلل كثيرة الحدود $g(x)$ في $Z_5[x]$.

38- طبق مبرهنة التقسيم الخوارزمي لتقسيم كثيرة الحدود التالية :

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1 \text{ في } Z_5[x] \text{ على كثيرة الحدود}$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

(لاحظ على سبيل المثال في الحلقة $Z_5[x] : 4x - (-3x) = 2x$.)

39- حلل كثيرة الحدود $g(x) = x^4 + 4$ إلى عوامل خطية في الحلقة $Z_5[x]$.

40- ادرس قابلية تحليل كثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 8x - 2$ على الحقول التالية

C, R, Q . ثم حلل كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 5$ إلى عوامل

خطية في الحلقة $Z_{11}[x]$.

41- بيّن فيما إذا كانت كثيرة الحدود التالية: $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ ،

غير قابلة للتحليل في الحلقة $Q[x]$. اعتبر $P = 2$ ، وذلك بطريقتين مختلفتين .

42- صِفْ حلقة القسمة $R = R[x]/I$ ، حيث أن : $I = \langle x^2 + 1 \rangle$.

43- أثبت أن التطبيق : $F \longrightarrow R[x]/I : \varphi(a) = \overline{a}$

هو تماثل حلقي . حيث أن I مثالية $\neq 0$ ، F حقلاً ما .

44- صِفْ حلقة القسمة $R = Q[x]/\langle x^2 - 2 \rangle$.

45- أوجد كثيرة حدود واحدية $h(x)$ في $F[x]$ ، بحيث يكون $I = \langle h(x) \rangle$

وذلك :

$I = \{f(x) \in F[x] : f(x) \text{ يساوي الصفر}\}$

46- صف حلقة القسمة $R = F[x] / \langle h(x) \rangle$ ، ثم اكتب جدولي الجمع

والضرب لـ R في الحالات التالية :

$$h(x) = x^2 \quad , \quad F = \mathbb{Z}_2 \quad (a)$$

$$h(x) = x^3 + 1 \quad , \quad F = \mathbb{Z}_2 \quad (b)$$

$$h(x) = x^2 \quad , \quad F = \mathbb{Z}_3 \quad (c)$$

47- أنشئ حلقاً من المرتبة الثامنة ، ثم اكتب جدول بالنسبة لعملية الضرب .

48- إذا كان $p/q \in \mathbb{Q}$ جذراً لكثيرة الحدود :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

حيث أن p, q أوليان نسبياً و $a_n \neq 0$ ، أثبت أن P/a_0 و q/a_0 .

تطبيق : أوجد الجذور النسبية (الكسرية) لكثيرة الحدود :

$$P(x) = 6x^4 - 25x^3 + 32x^2 + 3x - 10$$

49- إذا كانت $f = (1, 2, 3, 1, 0)$ و $g = (2, 1, 1, 3, 0)$ كثيرتي حدود على الحلقة

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، أوجد $f + g$ و $f \cdot g$. ثم بين فيما إذا كانت $h = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots)$

كثيرة حدود على $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

50- إذا كان العدد المركب $a + ib$ جذراً لكثيرة الحدود $P(x)$ ، ذي الأمثال

الحقيقية ، فإن مرافق هذا الجذر ، أي $a - ib$ يكون جذراً لـ $P(x)$ أيضاً . وماذا

تستنتج من ذلك .

51- بفرض أن K حلقاً مميزه الصفر ، يكون كثير الحدود في $R[x]$ متطابقين

إذا ، و فقط إذا ، تساوت الأمثال في قوى x ، أي أن :

$$\sum a_i x^i = \sum b_i x^i \Leftrightarrow a_i = b_i ; \forall i$$

فهل هذا الأمر صحيح من أجل الحقول التي ليست مميزاتها أصفاراً .

52- إذا كان P عدداً أولياً ما ، أثبت أن كثيرة الحدود :

$$P(x) = x^{P-1} + x^{P-2} + \dots + x + 1$$

غير قابلة للتحويل على الحلقة $(Q, +, \cdot)$.

إرشاد للحل : بديل كل x بـ $y + 1$ ، ثم استفد من معيار اينشتاين .

53- أثبت أن رتبة تضاعف الجذر $(x = -2)$ لكثيرة الحدود :

$$P(x) = x^4 + \frac{13}{2}x^3 + 15x^2 + 14x + 4$$

تساوي العدد 3 .

54- ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، ولتكن P و Q كثيرتي حدود غير صفريتين من

الحلقة $F[x]$ ، ولتكن $R \in F[x]$ كثيرة حدود واحدة ، وإذا كانت $R.F[x]$ مثالية رئيسية والتي تساوي $P.F[x] + Q.F[x]$.

أثبت أن كثيرة الحدود R هي القاسم المشترك الأكبر لكثيرتي الحدود P و Q . وهل العكس صحيح ، علّل ذلك .

55- أثبت أن كثيرات الحدود التالية والتي هي من الحلقة $(R[x], +, \cdot)$ أولية

فيما بينها :

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$Q(x) = x^2 + x - 2$$

$$R(x) = x^2 + 1$$

56- إذا كانت كثيرة الحدود $g(x)$ تقسم كثيرة الحدود $f(x)$ ، بين أن :

$$\deg g(x) \leq \deg f(x)$$

57- أثبت أن العناصر غير الصفريّة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي عناصر وحدة

للحلقة $R[x]$.

58- إذا كانت A مصفوفة مربعة حقيقية ، وإذا كانت P مصفوفة غير شاذة ، أي أن $|P| \neq 0$ من نفس المرتبة لـ A ، أثبت أنه من أجل أية كثيرة حدود $f(x)$ يتحقق :

$$f(P^{-1}.A.P) = P^{-1} f(A).P$$

ثم أثبت أنه إذا كانت المصفوفة B مشابهة للمصفوفة A ، (أي أنه توجد مصفوفة غير شاذة ولتكن P بحيث $B = P^{-1}.A.P$) فإن $f(B)$ مشابهة لـ $f(A)$ ، من أجل أي كثيرة حدود $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل

الخامس :

الفضاءات الحلقية (الحلقيات)

Modules

9- تمرينات محلولة للفصل الخامس

- الفضاءات الحلقية (الحلقيات) -

1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان n عدداً صحيحاً موجياً ، وإذا كان :

$$R^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in R, i = 1, \dots, n\}$$

ولنعرف على R^n عملية ثنائية داخلية $(+)$ بالشكل :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n \quad \text{لكل}$$

وعملية خارجية (\cdot) بالشكل :

$$b \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b \cdot a_1, b \cdot a_2, \dots, b \cdot a_n)$$

$$b \in K, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n \quad \text{لكل}$$

المطلوب ، أثبت أن R^n فضاء حلقي على R .

الحل :

يمكن التحقق ، بسهولة ، من أن $(R^n, +)$ زمرة إبدالية .

لنتحقق الآن من بقية الشروط :

ليكن (a_1, a_2, \dots, a_n) و (b_1, b_2, \dots, b_n) عنصرين ما من R^n ، وإذا كان x, y

عنصرين ما من R ، فإن :

$$\begin{aligned} 1) \quad x [(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)] &= x (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= [x (a_1 + b_1), \dots, x (a_n + b_n)] \\ &= (xa_1 + xb_1, \dots, xa_n + xb_n) \\ &= (xa_1, \dots, xa_n) + (xb_1, \dots, xb_n) \\ &= x (a_1, \dots, a_n) + x (b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) (x + y) (a_1, a_2, \dots, a_n) &= [(x + y) a_1, \dots, (x + y) a_n] \\
 &= (x a_1 + y a_1, \dots, x a_n + y a_n) \\
 &= (x a_1, \dots, x a_n) + (y a_1, \dots, y a_n) \\
 &= x (a_1, \dots, a_n) + y (a_1, \dots, a_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) (x \cdot y) (a_1, a_2, \dots, a_n) &= [(x \cdot y) a_1, \dots, (x \cdot y) a_n] \\
 &= [x \cdot (y \cdot a_1), \dots, x \cdot (y \cdot a_n)] \\
 &= x \cdot (y \cdot a_1, \dots, y \cdot a_n) \\
 &= x \cdot [y (a_1, \dots, a_n)]
 \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق أن R^n فضاء حلقي على R .

ملاحظة :

إذا كان $n = 1$ ، عندها يمكن النظر إلى R على أنها فضاء حلقي فوق نفسه .
ويجدر الانتباه، أنه إذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد ، فإن الفضاء الحلقي R^n
بمحايد أيضاً ، لأنه ، إذا رمزنا لعنصر الوحدة (المحايد) في الحلقة $(R, +, \cdot)$
بالرمز 1 ، فإن :

$$1 \cdot (a_1, \dots, a_n) = (1 \cdot a_1, \dots, 1 \cdot a_n) = (a_1, \dots, a_n)$$

لكل (a_1, \dots, a_n) من R^n .

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، ولتكن $M_2(R)$ مجموعة المصفوفات الحقيقية
المربعة من المرتبة (الدرجة) الثانية ، أي أن :

$$M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R \right\}$$

ولنعرف على $M_2(R)$ عملية ثنائية داخلية (+) وعملية خارجية (·) على النحو
التالي :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{pmatrix}$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x.a & x.b \\ x.c & x.d \end{pmatrix}$$

لكل x من R و $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ من $M_2(R)$.

المطلوب ، برهن أن $M_2(R)$ فضاء حلقي على R .

الحل :

نلاحظ أولاً أن $M_2(R) \neq \phi$. ولنبرهن أولاً أن $(M_2(R), +)$ زمرة إبدالية .

لتكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \ell & m \\ n & j \end{pmatrix}$ ثلاثة عناصر من $M_2(R)$ ، عندئذٍ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell & m \\ n & j \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+\ell & f+m \\ g+n & h+j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(e+\ell) & b+(f+m) \\ c+(g+n) & d+(h+j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+e)+\ell & (b+f)+m \\ (c+g)+n & (d+h)+j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell & m \\ n & j \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \ell & m \\ n & j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

لنرمز للعنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع في الحلقة $(R, +, 0)$ بـ o ، فإن :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+o & b+o \\ c+o & d+o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

لكل $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ من $M_2(R)$.

إذا كان $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عنصراً ما من $M_2(R)$ ، فإن :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نستنتج مما سبق أن زمرة إبدالية $(M_2(\mathbb{R}), +)$ عنصرها المحايد هو $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومعكوس كل عنصر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ من $M_2(\mathbb{R})$ هو $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

لنتحقق الآن من بقية شروط الفضاء الحلقي :

ليكن x, y عنصرين ما من \mathbb{R} ، وإذا كان $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ فإن :

$$\begin{aligned} x \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] &= x \cdot \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(a+e) & x(b+f) \\ x(c+g) & x(d+h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa+xe & xb+xf \\ xc+xg & xd+xh \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe & xf \\ xg & xh \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x+y)a & (x+y)b \\ (x+y)c & (x+y)d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x.a+y.a & x.b+y.b \\ x.c+y.c & x.d+y.d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x.a & x.b \\ x.c & x.d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y.a & y.b \\ y.c & y.d \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x.y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x.y).a & (x.y).b \\ (x.y).c & (x.y).d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x.(y.a) & x.(y.b) \\ x.(y.c) & x.(y.d) \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} y.a & y.b \\ y.c & y.d \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \left[y \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق ، أن $M_2(R)$ فضاء حلقى على الحلقة $(R, +, \cdot)$.
بالاستفادة من التمرين السابق ، يمكن حل التمرين التالي :

3- بفرض أن $M_{n \times m}(R)$ مجموعة المصفوفات من الشكل $n \times m$ على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ ، عندئذٍ : $M_{n \times m}(R)$ تشكل فضاءً حلقياً على R .
الحل :

إن $(M_{n \times m}, +)$ تشكل زمرة إبدالية (بالنسبة لعملية جمع المصفوفات) ، وبسهولة يمكن التحقق من جميع شروط الفضاء الحلقى، حيث أن عملية الضرب (القياسي) $r.a_{ij}$ للمصفوفة (a_{ij}) بالعنصر r من R معرفة.

4- لتكن $(\text{End}(M), +, \cdot)$ حلقة التشاكلات الذاتية للزمرة الإبدالية $(M, +)$.
برهن أن M يشكل فضاء حلقى من اليسار على الحلقة $(\text{End}(M), +, \cdot)$.
الحل :

لدينا فرضاً $(M, +)$ زمرة إبدالية ، لنبرهن على بقية الشروط الواردة في تعريف الفضاء الحلقى .

ليكن $r_1, r_2, r \in \text{End}(M)$ و $m_1, m_2, m \in M$ ، عندئذٍ يتحقق ما يلي :

$$r \cdot (m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$$

$$(r_1 + r_2) \cdot m = r_1.m + r_2.m$$

$$(r_1.r_2) \cdot m = r_1.(r_2.m)$$

كما أن $1.m = m$

5- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كان x, a عنصرين من M, R على الترتيب ، بحيث يكون $a \cdot x = 0$ ، علماً أن 0 هو صفر الفضاء الحلقى M . وإذا كان a معكوس في R بالنسبة للعملية (\cdot) ، فإن $x = 0$.

الحل :

بما أن $a \cdot x = 0$ ، فإن :

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot 0$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot x = 0$$

أي أن

$$1 \cdot x = 0$$

$$x = 0$$

إذاً

6- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان M فضاءً حلقياً ما على R ، و L فضاءً حلقياً جزئياً من M ، ولنفرض أن مجموعة جزئية غير خالية من R ، لنثبت أن $A \cdot L$ فضاءً حلقياً جزئياً من M على R .

الحل :

$$\text{إن } \phi \neq A \cdot L \subseteq M$$

ليكن x, y عنصرين ما من $A \cdot L$ ، فإنه يمكن كتابتهما على الشكل :

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \quad , \quad b = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j$$

لكل a_i, b_j من A و x_i, y_j من L ، m, n عدداً صحيحان موجبان، وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} x - y &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i - \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^m b_j \cdot (-y_j) \in A \cdot L \end{aligned}$$

ليكن a, y عنصرين من R و A على الترتيب ، وبالتالي يمكن كتابة العنصر y بالشكل :

$$y = \sum_{k=1}^t c_k \cdot y_k$$

لكل c_k من A و y_k من L ، و t عدد صحيح موجب ، وبالتالي ، فإن :

$$\begin{aligned} a \cdot y &= a \cdot \left(\sum_{k=1}^t c_k \cdot y_k \right) = \sum_{k=1}^t a(c_k \cdot y_k) \\ &= \sum_{k=1}^t (c_k \cdot a) \cdot y_k = \sum_{k=1}^t c_k \cdot (a \cdot y_k) \in A \cdot L \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق ، أن $A \cdot L$ فضاء حلقي جزئي من M .

7- ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وإذا كانت A مصفوفة من الشكل $m \times n$ على F ، وليكن التطبيق :

$\varphi : F^n \longrightarrow F^m$: المعرف بالشكل : $\varphi(m) = m \cdot A$ ، حيث أن F^n و F^m مصفوفات من الشكل $1 \times n$ و $1 \times m$ على الترتيب ، برهن أن φ تشاكلاً .

الحل :

لكل m, m_1, m_2 من F^n و $r \in F$ يكون لدينا :

$$\varphi(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) \cdot A = m_1 \cdot A + m_2 \cdot A$$

$$= \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$$

$$\varphi(r \cdot m) = (r \cdot m) \cdot A = r(m \cdot A) = r \cdot \varphi(m)$$

8- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M و N فضاءين حلقيين بمحايدين على R ، أثبت أن $\varphi : M \longrightarrow N$ تطبيقاً ، ثم أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون φ هو تشاكل للفضاء الحلقي M في الفضاء الحلقي N على R هو أن يتحقق :

$$\varphi(a \cdot x + b \cdot y) = a \varphi(x) + b \varphi(y) \quad (*)$$

لكل a, b من R و x, y من M .

الحل :

نبرهن أولاً ، أن الشرط (*) محقق ، علماً أن φ تشاكلاً .

بما أن φ هو تشاكل على R للفضاء الحلقي M في الفضاء الحلقي N ، فإن :

$$\varphi(ax + by) = \varphi(ax) + \varphi(by) = a \varphi(x) + b \varphi(y)$$

وذلك مهما يكن b, a من R و x, y من M .

لنبرهن الآن أن φ تشاكل ، علماً أن الشرط (*) محقق .

لنرمز لصفر الحلقة $(R, +, \cdot)$ بالرمز 0 ، ولعنصر الوحدة فيها بالرمز 1 ، بما أن :

$$\varphi(ax + by) = a \varphi(x) + b \varphi(y)$$

لكل x, y من M و a, b من R ، فإن :

$$\varphi(1 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot \varphi(x) + 1 \cdot \varphi(y)$$

$$\varphi(ax + 0 \cdot y) = a \varphi(x) + 0 \varphi(y)$$

لكل x, y من M و a من R ، وبالتالي ، فإن :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(a \cdot x) = a \varphi(x)$$

لكل x, y من M و a من R .

إذن φ هو تشاكل للفضاء الحلقي M في الفضاء الحلقي N ، على R .

9- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كان

N, L فضاءين حلقيين جزئيين من M بحيث يكون $N \subset L$ ، عندئذٍ

$$\frac{M/L}{N/L} \cong M/L$$

الحل :

التطبيق $\varphi : M/L \longrightarrow M/L$ المعروف بالشكل : $\varphi(x + L) = x + N$ لكل x

من M هو تشاكل للفضاء الحلقي M/L على الفضاء الحلقي M/N ، كما أن نواته

هي N/L ، وحسب المبرهنة الأساسية للتشاكل نجد :

$$\frac{M/L}{N/L} \cong M/N$$

10- لتكن Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، والتي يمكن عدّها فضاءً حلقياً على

حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ ، ولنعرف التطبيق $\varphi: Z \rightarrow Z$ بالشكل :
 $\varphi(m) = 3m$ لكل m من Z .

أثبت أن φ تشاكل على الفضاء الحلقي Z وأوجد نواته ، وصورته .

الحل :

لكل n, m من Z ولكل a من Z ، وبالتالي يكون لدينا :

$$\varphi(m + n) = 3(m + n) = 3m + 3n$$

$$= \varphi(m) + \varphi(n)$$

$$\varphi(a \cdot m) = 3(a \cdot m) = (3a) \cdot m = (a \cdot 3) m = a(3m)$$

$$= a \varphi(m)$$

$$\text{Ker } \varphi = \{3m = 0\} \Rightarrow \text{Ker } \varphi = \{0\}$$

$$\text{Im } \varphi = \{3m : m \in Z\} = 3 \cdot Z$$

لاحظ أيضاً ، أن كلاً من الفضاءين $\text{Ker } \varphi$ و $\text{Im } \varphi$ فضاء حلقي جزئي على الحلقة $(Z, +, \cdot)$ من الفضاء الحلقي Z .

11- بفرض أن N, M فضاءين حقيقيين ما ، على حلقة ولتكن $(R, +, \cdot)$. وإذا كان M_1, M_2, \dots, M_n حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ فضاءات حلقية جزئية من M بحيث يكون

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

وإذا كانت N_1, N_2, \dots, N_n فضاءات حلقية جزئية من N بحيث يكون

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n$$

وإذا كان $M_i \cong N_i$ ، من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ ، المطلوب ، بين أن $M \cong N$.

الحل :

بما أن $M_i \cong N_i$ ، يوجد تماثلاً φ_i ، على الأقل ، للفضاء الحلقي M_i على الفضاء الحلقي N_i من أجل $i = 1, 2, \dots, n$. وبما أن $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ ، فإنه يمكن كتابة كل

عصر x من M بشكل وحيد بالصورة : $x = \sum_{i=1}^n x_i$ لكل x_i من M_i .

الآن ، نعرّف التطبيق $\varphi : M \longrightarrow N$ بالشكل :

$$\varphi(x_1 + \dots + x_n) = \varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)$$

لكل $x_i \in M_i$ و $i = 1, 2, \dots, n$. ولنثبت أن φ هو تماثل للفضاء الحلقي M على الفضاء الحلقي N .

ليكن r عنصراً ما من R ، و x_i, y_i من M_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ، فإن :

$$\begin{aligned} \varphi [(x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n)] &= \varphi [(x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)] \\ &= \varphi_1(x_1 + y_1) + \dots + \varphi_n(x_n + y_n) \\ &= [\varphi_1(x_1) + \varphi_1(y_1)] + \dots + [\varphi_n(x_n) + \varphi_n(y_n)] \\ &= [\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)] + [\varphi_1(y_1) + \dots + \varphi_n(y_n)] \\ &= \varphi(x_1 + \dots + x_n) + \varphi(y_1 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi [r(x_1 + \dots + x_n)] &= \varphi(r.x_1 + \dots + r.x_n) \\ &= \varphi_1(r.x_1) + \dots + \varphi_n(r.x_n) \\ &= r.\varphi_1(x_1) + \dots + r.\varphi_n(x_n) \\ &= r[\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)] \\ &= r.\varphi(x_1 + \dots + x_n) \end{aligned}$$

الآن ، ليكن x_i, y_i من M_i ، حيث أن $i = 1, 2, \dots, n$ بحيث يكون :

$$\varphi(x_1 + \dots + x_n) = \varphi(y_1 + \dots + y_n)$$

عندئذ يكون لدينا :

$$\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n) = \varphi_1(y_1) + \dots + \varphi_n(y_n)$$

وبما أن $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n$ ، فإن :

$$\varphi_i(x_i) = \varphi_i(y_i) ; i = 1, 2, \dots, n$$

وبما أن φ_i هو تماثل للفضاء الحلقي M_i على الفضاء الحلقي N_i ، حيث أن $i = 1, 2, \dots, n$ ، فيكون :

$$x_i = y_i ; i = 1, 2, \dots, n$$

أي أن :

$$x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$$

بفرض أن a عنصراً ما من N ، وبالتالي يمكن كتابته بالشكل : $a = a_1 + \dots + a_n$ حيث a_i من N_i (لأن $N = \bigoplus_{i=1}^n N_i$) ، وبالتالي ، فإن :

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi_1^{-1}(a_1) + \dots + \varphi_n^{-1}(a_n)) &= \varphi_1(\varphi_1^{-1}(a_1)) + \dots + \varphi_n(\varphi_n^{-1}(a_n)) \\ &= (\varphi_1 \circ \varphi_1^{-1})(a_1) + \dots + (\varphi_n \circ \varphi_n^{-1})(a_n) \\ &= a_1 + \dots + a_n = a \end{aligned}$$

نستنتج مما سبق أن φ هو تماثل للفضاء الحلقى M على الفضاء الحلقى N أي أن $M \cong N$.

12- إذا كانت $(A, +)$ و $(B, +)$ زمرتين إيداليتين ، (يمكن اعتبارهما كفضاءين حلقيين على حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$) ، أثبت أن كل تشاكل زمري $\varphi: A \rightarrow B$ بين الزمرتين المفروضتين هو تشاكل بين الفضاءين الحلقيين A و B على الحلقة $(Q, +, \cdot)$.

الحل :

لكل x, y من A و $a \in Z^+$ ، فإن :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(ax) = a \varphi(x)$$

لكن ، إذا كان $a \in Z^-$ ، فإننا نضع $a = -b$ ، فنجد أن الشرط الثاني سيكون :

$$\varphi(ax) = \varphi(-bx) = -\varphi(bx) = -b \varphi(x) = a \varphi(x)$$

13- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، و M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كانت N_i ، حيث $i = 1, 2, 3$ فضاءات حلقية جزئية من M بحيث يكون : $M = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ ، ولنرمز بـ L_i بـ $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 N_j$ حيث $i = 1, 2, 3$ والمطلوب :

$$i = 1, 2, 3 ; N_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 L_j \quad \text{أثبت أن}$$

$$i = 1, 2, 3 ; L_i + \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 L_j = M \quad -2$$

$$-3 \quad L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\} \text{ ، حيث أن } 0 \text{ هو صفر الفضاء الحلقي } M \text{ على } R.$$

الحل :

(1) لنبرهن على سبيل المثال : $N_1 = L_2 \cap L_3$ ، وبنفس الطريقة يمكن التحقق من أن : $N_2 = L_1 \cap L_3$ و $N_3 = L_1 \cap L_2$.
ليكن x عنصراً ما من N_1 ، وبالتالي يكون :

$$x \in N_1 + N_3 = L_2 \quad , \quad x \in N_1 + N_2 = L_3$$

ومنه يكون $x \in L_2 \cap L_3$.

ليكن الآن y عنصراً ما من $L_2 \cap L_3$ ، وبالتالي ، فإن :

$$y \in M, y \in L_2, y \in L_3$$

وبالتالي ، فإنه يمكن كتابة العنصر y بالأشكال التالية :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 ; y_i \in N_i ; i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$y = y'_1 + y'_3 ; y'_1 \in N_1, y'_3 \in N_3 \quad (2)$$

$$y = y''_1 + y''_2 ; y''_1 \in N_1, y''_2 \in N_2 \quad (3)$$

من (1) و(2) ، وبما أن $M = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ نستنتج أن :

$$y_2 = 0 \quad (4)$$

ومن العلاقات (1) و(3) وحسب $M = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ نجد أن :

$$y_3 = 0 \quad (5)$$

من العلاقات (1) و(4) و(5) نجد أن : $y = y_1 \in N_1$.

نستنتج ، مما سبق أن $N_1 = L_2 \cap L_3$.

(2) لأن $L_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 N_j$ وحسب الطلب السابق (1): $N_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 L_j$ حيث

$i = 1, 2, 3$ يكون لدينا :

$$L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 L_j = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 N_j \right) + N_i = \sum_{j=1}^3 N_j = M ; i = 1, 2, 3$$

(3) لأن $M = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ ، فإن $N_3 \cap (N_1 + N_2) = \{0\}$ ومنه

يكون :

$$L_1 \cap (L_2 \cap L_3) = (L_1 \cap L_2) \cap L_3 = N_3 \cap (N_1 + N_2) = \{0\}$$

ملاحظة :

يمكن تعميم التمرين السابق بالشكل التالي :

إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً ما على R ، وإذا كان

$n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ ، فضاءات حلقية جزئية من M بحيث يكون :

$$M = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$$

وإذا رمزنا بـ $L_i = \bigcap_{j=1, j \neq i}^n N_j$ و $i = 1, 2, \dots, n$ ، عندئذ يتحقق ما يلي :

$$(1) N_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n L_j , \text{ حيث } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n L_j = M , \text{ حيث } i = 1, 2, \dots, n$$

(3) $L_1 \cap \dots \cap L_n = \{0\}$ ، حيث أن 0 هو صفر الفضاء الحلقى M على R .

14- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كانت C, B, A فضاءات حلقية جزئية من

فضاء حلقى M على R ، وبحيث يكون $C \subseteq A$ ، أثبت أن :

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$$

الحل :

بما أن حاصل جمع فضاءين حلقيين جزئيين هو فضاء حلقى جزئى ، فإن :

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B) + C \subseteq A + C$$

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) + C \subseteq B + C$$

وبالتالي يكون :

$$(A \cap B) + C \subseteq (A + C) \cap (B + C)$$

$$(A \cap B) + C \subseteq A \cap (B + C) \quad (1)$$

لأنه $C \subseteq A$ فرضاً .

من جهة ثانية ، إذا كان $x \in A \cap (B + C)$ ، فإن $x \in A$ ، و $x \in (B + C)$ ، وبالتالي نكتب العنصر a بالشكل $a = b + c$ حيث $b \in B$ و $c \in C$.

لدينا $b = a - c$ ، وبما أن $C \subseteq A$ فيكون $c \in A$ ، وبالتالي فإن : $b \in A \cap B$ ، ومن ذلك ينتج أن : $a \in (A \cap B) + C$ ، أي أن :

$$A \cap (B + C) \subseteq (A \cap B) + C \quad (2)$$

من الاحتوايين (1) و(2) تتحقق المساواة المطلوبة .

15- ليكن M فضاءً حلقياً محايداً على حلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت :

$S = \{x_1, \dots, x_n ; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ مجموعة من M بحيث $M = (S)$ ، وليكن $1 \leq k \leq n$ بحيث يتحقق : $x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n b_i \cdot x_i$ لكل $b_i \in R$. أثبت أن المجموعة

$S - \{x_k\}$ مولدة لـ M .

الحل :

ليكن x عنصراً ما من الفضاء الحلقى M ، وبالتالي يمكن كتابته بالشكل :

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i ، لكل a_i من R ، وبالتالي :$$

$$\begin{aligned} x &= a_k \cdot x_k + \sum_{i=1, i \neq k}^n a_i \cdot x_i = a_k \left(\sum_{i=1, i \neq k}^n b_i \cdot x_i \right) + \sum_{i=1, i \neq k}^n a_i \cdot x_i \\ &= \sum_{i=1, i \neq k}^n (a_k \cdot b_i) \cdot x_i + \sum_{i=1, i \neq k}^n a_i \cdot x_i \\ &= \sum_{i=1, i \neq k}^n (a_k \cdot b_i + a_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $\{x_k\} - S$ مولدة لـ M .
16- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً بمحايد على R ،
 وإذا كانت المجموعة المنتهية S التالية : $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ من M بحيث يكون
 $M = (S)$ ، وإذا كان $1 \leq t \leq n$ بحيث يتحقق :

$$x_k = b \cdot y + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n b_i \cdot x_i \quad ; \quad b, b_i \in R, y \in M \text{ لكل}$$

المطلوب ، أثبت أن المجموعة $\{y\} \cup S - \{x_k\}$ مولدة لـ M .
 الحل :

ليكن x عنصراً ما من M ، وبالتالي يمكن كتابته بالشكل : $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ ، لكل
 a_i من R . وبالتالي :

$$\begin{aligned} x &= a_t \cdot x_t + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^n a_i \cdot x_i \\ &= a_t \left(b \cdot y + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^n b_i \cdot x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^n a_i \cdot x_i \\ &= (a_t \cdot b) y + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^n (a_t \cdot b_i + a_i) x_i \end{aligned}$$

17- لنرمز لعنصر الوحدة للحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 1 ، ولصفرها بـ 0 ، ولنعرّف
 على المجموعة التالية :

$$R^4 = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in R\}$$

العملية الثنائية الداخلية $(+)$ بالشكل :

$$(a, b, c, d) + (e, f, g, h) = (a+e, b+f, c+g, d+h)$$

لكل a, b, c, d, e, f, g, h من R . والعملية الخارجية (\cdot) بالشكل :

$$x \cdot (a, b, c, d) = (x \cdot a, x \cdot b, x \cdot c, x \cdot d)$$

لكل d, c, b, a من R .

يمكن التأكد بسهولة أن R^4 فضاء حلقي بمحايد على R . المطلوب أثبت أن المجموعة :

$$S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

مستقلة خطياً على R .

الحل :

لتكن x, y, z, t عناصر من R بحيث يكون :

$$x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

علماً أن $(0,0,0,0)$ هو صفر الفضاء الحلقي R^n ، وبالتالي يكون لدينا :

$$(x,0,0,0) + (0,y,0,0) + (0,0,z,0) + (0,0,0,t) = (0,0,0,0)$$

أي أن :

$$(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$$

إذن :

$$x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$$

18- ليكن N, M فضاءين حلقيين بمحايدين على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$. وإذا

كانت $\{a_i\}$ أسرة عناصر من الفضاء الحلقي M بحيث $\{a_i\}$ تشكل قاعدة لـ M على R ، وإذا كانت $\{b_i\}$ أسرة عناصر من الفضاء الحلقي N بحيث $1 \leq i \leq n$ ، المطلوب بيّن أنه يمكن إيجاد تشاكل وحيد φ لـ M في N ، يكون من أجله $\varphi(a_i) = b_i$ ، لكل $1 \leq i \leq n$.

الحل :

بما أن $\{a_i\}$ تشكل قاعدة لـ M على R ، حيث $1 \leq i \leq n$ ، فإنه يمكن كتابة كل

عصر x من M ، بصورة وحيدة ، بالشكل : $x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ ، لكل x_i من R .

لنعرف الآن ، التطبيق $\varphi : M \rightarrow N$ ، بالشكل :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot b_i$$

ولنبرهن الآن ، أن φ تشاكل .

ليكن b, a عنصرين ما من M ، وإذا كان x عنصراً ما من R ، فإنه يمكن كتابة b, a على الشكل التالي :

$$a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_i \quad ; \quad x_i \in R$$

$$b = \sum_{i=1}^n y_i \cdot a_i \quad ; \quad y_i \in R$$

وبالتالي يكون :

$$a + b = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \cdot a_i \quad \text{و} \quad x \cdot a = \sum_{i=1}^n x (x_i \cdot a_i) = \sum_{i=1}^n (x x_i) \cdot a_i$$

وبالتالي يكون :

$$\varphi(a + b) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \cdot b_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^n y_i \cdot b_i$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x \cdot a) = \sum_{i=1}^n (x \cdot x_i) \cdot b_i = x \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot b_i \right)$$

$$= x \cdot \varphi(a)$$

لنبرهن الآن ، أن $\varphi(a_i) = b_i$ ، لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

لنرمز لعنصر الوحدة في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بـ 1 ، وبالتالي يكون : $a_i = 1 \cdot a_i$ لكل

$$i = 1, 2, \dots, n$$

ومنه يكون : $\varphi(a_i) = 1 \cdot b_i = b_i$ ، لكل $i = 1, 2, \dots, n$

وإذا كان Ψ هو أيضاً تشاكل لـ M في N من أجله يكون : $\Psi(a_i) = b_i$ ، لكل

$i = 1, 2, \dots, n$ ، فإن $\varphi = \Psi$ ، لأن : إذا كان a عنصراً ما من M ، وبالتالي يمكن

كتابته ، بالشكل $a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_i$ ، لكل x_i من R ، وبالتالي يكون :

$$\Psi(a) = \Psi\left(\sum_{i=1}^n (x_i \cdot a_i)\right) = \sum_{i=1}^n \Psi(x_i \cdot a_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Psi(a_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot b_i$$

نستنتج مما سبق أن φ هو التشاكل الوحيد لـ M في N ، يكون من أجله
 $\varphi(a_i) = b_i$ ، لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

19- ليكن M فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان M, L فضاءان حلقيان جزئيان من M بحيث $L \subseteq N$ ، وبفرض أن الفضاء الحلقسي الجزئي L متمماً في M ، أثبت أن للفضاء الحلقسي الجزئي L متمماً في N .

الحل :

لنرمز بـ 0 لصفر الفضاء الحلقسي M .

بما أن للفضاء الحلقسي الجزئي L متمماً في M ، فإنه يوجد فضاء حلقسي جزئي F من M ، يكون من أجله : $M = L \oplus F$ ، وبالتالي فإن :

$$M = L + F , L \cap F = \{0\}$$

ومنه يكون :

$$N = N \cap M = N \cap (L + F) = L + (N \cap F)$$

$$L \cap (N \cap F) = N \cap (L \cap F) = N \cap \{0\} = \{0\}$$

إذن $N = L \oplus (N \cap F)$ ، أي أن للفضاء الحلقسي الجزئي L متمماً في N هو الفضاء الحلقسي الجزئي $N \cap F$.

20- من المعلوم ، أن الفضاء المتجهي $(V, +, \cdot)$ على الحقل $(F, +, \cdot)$ يمكن اعتباره فضاءً حلقياً على الحقل $(F, +, \cdot)$ ، بيّن أن V عديم القتل .

الحل :

ليكن a عنصراً غير صفري من الحقل $(F, +, \cdot)$ ، ومن الشرط $a \cdot x = 0$ حيث x من m ، فإن :

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot m) = (a^{-1} \cdot a) \cdot m = 1 \cdot m = m$$

إذن $m = 0$.

21- أثبت أن الفضاء الحلقسي Z على الحلقة $(Z, +, \cdot)$ هو فضاء حلقسي حر مولد

بالمجموعة $A = \{2,3\}$.

الحل :

لأن الفضاء الحلقى الجزئي المولد بالمجموعة A يحوي $1 = 3 - 2$ ويولد Z ، كما أن A لا تشكل أساساً للفضاء الحلقى Z ، لأن : $0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3$ مرتبطة خطية على Z ، وكذلك ، أي مجموعة جزئية فعلية من A لا تشكل قاعدة لأن : $\phi, \{3\}, \{2\}$ تولد فضاءات حلقية جزئية فعلية.

22- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاء حلقياً على R ، أثبت أن M المولد نهائياً على الحلقة R هو صورة لفضاء حلقى حر منتهي التوليد على R بالنسبة لتساكل ما .

الحل :

لتكن المجموعة $A = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ مولدة لـ M ، وإذا كانت المجموعة $B = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ تولد بحرية الفضاء الحلقى R^n على R .
لنعرف التطبيق φ بالشكل : $\varphi : R^n \longrightarrow M$:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i$$

وبما أن لكل عنصر وليكن a من R^n تمثيل وحيد بدلالة التركيب $\sum_{i=1}^n r_i \cdot e_i$ ، فإن φ حسن التعريف .

ليكن $x = \sum_{i=1}^n r'_i \cdot e_i$ و $y = \sum_{i=1}^n r_i \cdot e_i$ عنصرين ما من R^n ، عندئذ يمكن التحقق بسهولة ، أن :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(r \cdot x) = r \cdot \varphi(x)$$

إذن φ تشاكل من R^n على M .

وإذا كانت $K = \text{Ker } \varphi$ ، فحسب المبرهنة الأساسية الأولى للتماثل ، يكون :
 $R^n / K \cong M$.

10- تمرينات غير محلولة للفصل الخامس

1- لتكن K^S مجموعة التطبيقات للمجموعة $S \neq \emptyset$ في الحلقة $(R, +, \cdot)$ أي :

$$K^S = \{ f : S \longrightarrow R : \text{تطبيق } f \}$$

ولنعرف على المجموعة K^S عملية الجمع بالشكل :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) ; \forall x \in S$$

وقانون التشكيل الخارجي التالي مجموعة مؤثراته K :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) ; x \in S, \alpha \in R$$

أثبت أن المجموعة K^S تشكل فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$.

2- إذا كان $(V, +, \cdot)$ فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وكانت C, B, A

فضاءات حلقية جزئية من V ، بحيث $C \subseteq A$. أثبت صحة العلاقة :

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$$

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إيدالية ما ، وكانت $(V, +, \cdot)$ فضاءً حلقياً على R ، وإذا

فرضنا أن L فضاءً حلقياً من V ، و A مجموعة جزئية غير خالية من K ،
والمطلوب ، أثبت أن المجموعة :

$$A.L = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i : a_i \in A, x_i \in L \right\}$$

تشكل فضاءً حلقياً جزئياً من V .

4- إذا كان $(V, +, \cdot)$ فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت I مثالية

يسارية في R ، أثبت أن المجموعة التالية :

$$A.V = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : a_i \in A, x_i \in V \right\}$$

تشكل فضاءً حلقياً جزئياً من الفضاء الحلقى V .

- 5-** لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان M فضاءً حلقياً حراً مولداً بمجموعة منتهية على R ، أثبت أن أي قاعدة للفضاء M يكون له عدداً من العناصر نفسها .
- 6-** لتعرف تحويلاً خطياً من الفضاء المتجهي $(V, +, \cdot)$ على نفسه ، وإذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، أثبت أن V فضاءً حلقياً على الحقل $(F, +, \cdot)$.
- 7-** ليكن M فضاءً حلقياً بمحايد على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت المجموعة التالية :

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n ; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

- من M بحيث يكون : $M = (S)$ ، وإذا كان k عدداً من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\} - \{1\}$ ، بحيث يكون : $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} b_i \cdot x_i$ لكل b_i من R ، والمطلوب برهن أن المجموعة $S - \{x_k\}$ مولدة لـ M .

- 8-** لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان N فضاءً حلقياً جزئياً من الفضاء الحلقى M على R ، أثبت أنه يوجد تقابل يحافظ على الاحتواء ، بين مجموعة الفضاءات الحلقية الجزئية من M/N وبين مجموعة الفضاءات الحلقية الجزئية L من M ، حيث يتحقق $N \subseteq L \subseteq M$.

- 9-** لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، وإذا كان M فضاءً حلقياً حراً مولداً بمجموعة منتهية على R ، أثبت أن أي أساس للفضاء M يكون منتهياً .

- 10-** إذا كان M فضاءً حلقياً على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$. أثبت أن $\text{Hom}_R(M, M)$ حلقة جزئية من الحلقة $\text{Hom}(M, M)$.

- 11-** لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R وليكن $m \in M$. أثبت أن المجموعة N التالية :

$$N = \{r.m + n.m ; r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$$

- تشكل فضاءً حلقياً جزئياً من الفضاء M تحوي العنصر m من M . ثم أثبت أن $N = R.m$.

- 12-** لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وليكن N, M فضاءين حلقيين ما على R ، إذا

كان φ تشاكلاً للفضاء الحلقي M على الفضاء الحلقي N ونواته M' ، عندئذ :

1- يوجد تقابل (تطبيق متباين وشامل) بين مجموعة كل الفضاءات الحلقية الجزئية من الفضاء الحلقي N ومجموعة كل الفضاءات الحلقية الجزئية ، التي يحوي كل منها M' من الفضاء الحلقي M .

2- وإذا كان L فضاءً حلقياً جزئياً من N ، فإن :

$$M/\varphi^{-1}(L) \cong M/N' , \varphi^{-1}(L)/N \cong L$$

13- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، وإذا كان N, M فضاءين حلقيين بمحايدين على R ، وبفرض أن $\{a_i\}$ أسرة عناصر من M ، بحيث أن $\{a_i\}$ تشكل قاعدة لـ M على R ، وبفرض أن $\{b_i\}$ أسرة عناصره من N ، حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ، المطلوب :

أثبت أنه يمكن إيجاد تماثل وحيد φ لـ M في N يكون من أجله $\varphi(a_i) = b_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

14- ليكن N, M فضاءين حلقيين على الحلقة بمحايد $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان F, L فضاءين حلقيين جزئيين من الفضاءين الحلقيين N, M على الترتيب ، أثبت أن :

$$M \times N / L \times F \cong M/L \times N/F$$

إرشاد للحل : استند من مبرهنة التماثل الأولى .

15- إذا كان M فضاءً حلقياً ما على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كان L, N فضاءين حلقيين جزئيين من M ، فإن :

$$L/(L \cap N) \cong (L + N)/N$$

16- بفرض أن Q, P, N فضاءات جزئية حلقية من الفضاء الحلقي M على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، برهن ما يلي :

$$N + (P \cap Q) = (N + P) \cap (N + Q) \quad (1)$$

$$(N \cap P) + (P \cap Q) + (Q \cap N) = (N + P) \cap (P + Q) \cap (Q + N) \quad (2)$$

17- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وبفرض أن

N_1, N_2, \dots, N_n حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ فضاءات حلقية جزئية من M ، بحيث يكون: $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_n$ ، وإذا كانت فضاءات حلقية جزئية من N_1, N_2, \dots, N_n على الترتيب، وإذا رمزنا بـ $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ ، المطلوب:

(1) أثبت أن المجموع $L_1 + L_2 + \dots + L_n$ هو مجموع مباشر.

(2) إذا كان φ هو التطبيق $\varphi: M \rightarrow M/L$ المعرفة بالشكل:

$$\varphi(x) = x + L; \quad x \in M$$

وبفرض أن φ هو تشاكل للفضاء الحلقى M على الفضاء الحلقى M/L ، أثبت أن:

$$M/L = \varphi(N_1) \oplus \dots \oplus \varphi(N_n) \quad (a)$$

$$N_i/L_i \cong \varphi(N_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (b)$$

18- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، وإذا كان M^n فضاءً حلقياً على R ، حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ ، فإن M^n تشاكلاً مع M .

19- ليكن M فضاءً حلقياً على الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، وبفرض أن L, F, N فضاءات حلقية جزئية من M بحيث أن كلاً من الفضاءين الحلقين الجزئيين F و L هو متمم للفضاء الحلقى الجزئي N في M ، المطلوب أثبت أن $F \cong L$.

20- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد، وإذا كان M فضاءً حلقياً على R ، أثبت ما يلي:

الفضاء الحلقى M دائرياً، إذا، فقط إذا، كان $M \cong R/I$ حيث I مثالية يسارية في R .

21- ليكن M فضاءً حلقياً على حلقة ما، ولتكن $(R, +, \cdot)$ ، وإذا كانت N_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$ فضاءات حلقية جزئية من M ، بحيث يتحقق ما يلي:

$$\bigcap_{i=1}^3 N_i = \{0\}; \quad (0 \text{ هو صفر الفضاء الحلقى } M)$$

$$N_1 + (N_2 \cap N_3) = N_2 + (N_1 \cap N_3) = N_3 + (N_1 \cap N_2) = M$$

ولنرمز لـ $M_1 \rightarrow N_2 \cap N_3$ و $M_2 \rightarrow N_1 \cap N_3$ و $M_3 \rightarrow N_1 \cap N_2$ ،
والمطلوب :

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \quad (1) \text{ أثبت أن}$$

$$N_1 = M_2 + M_3 , N_2 = M_1 + M_3 , N_3 = M_1 + M_2 \quad (2)$$

22- لتكن $(Z_n, +, \cdot)$ حلقة، وإذا كان Z_n الفضاء الحلقي على الحلقة المفروضة.
أثبت أن Z_n هو فضاء حلقي حر ، وأن Z_n لا يشكل فضاءً حلقياً حراً على الحلقة
. Z

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل

السادس :

تمديد الحقول

Fields Extension

11- تمرينات محلولة للفصل السادس

- تمديد الحقول -

1- إذا كان P عدداً أولياً ، أثبت أن الامتداد $Q(\sqrt{P})$ للحقل Q امتداد منته .

الحل :

بما أن المجموعة $A = \{1, \sqrt{P}\}$ تشكل أساساً للفضاء المتجهي $Q(\sqrt{P})$ على الحقل Q ، وبالتالي فإن $Q(\sqrt{P})$ امتداد منته للحقل Q ، كما أن :

$$\dim Q(\sqrt{P}) = [Q(\sqrt{P}) : Q] = 2$$

2- أثبت أن الأعداد التالية $5, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7} + 3$ جبرية على الحقل Q .

الحل :

بما أن الأعداد المذكورة سابقاً تشكل جذوراً لكثيرات الحدود التالية على الترتيب :

$$x - 5 , x^2 - 7 , (x - 3)^n - 7$$

فإن هذه الأعداد جبرية على الحقل Q .

3- إذا كان $u = \sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ ، أوجد كثيرة الحدود $f(x) \in Q[x]$ بحيث يكون

العدد u جذراً لها.

الحل :

لدينا $u - \sqrt{5} = \sqrt[3]{2}$ ، وبالتالي فإن $(u - \sqrt{5})^3 = 2$ ، ومنه يكون

$$u^3 - 3\sqrt{5}u^2 + 15u - 5\sqrt{5} = 2$$

وبالتالي يكون :

$$u^3 - 15u - 2 = \sqrt{5}(3u^2 + 5)$$

وبتربيع العلاقة الأخيرة نجد :

$$(u^3 - 15u - 2)^2 = 5(3u^2 + 5)^2$$

وبالتالي يكون u جذراً لكثيرة الحدود :

$$f(x) = x^6 - 15x^4 - 4x^3 + 75x^2 - 60x - 121 = 0$$

4- أثبت أن $Q(i,-i) = Q(i)$.

الحل :

إن $Q(i) \subseteq Q(i,-i)$ ، لأن $Q(i,-i)$ تحتوي على Q وعلى i ، لكن $Q(i)$ حقل يحوي Q و i ، وبالتالي فهو يحوي $i - i$ أيضاً وبذلك يكون $Q(i,-i) \subseteq Q(i)$.

5- ليكن E امتداد للحقل F ، وإذا كان $u, v \in E$ ، ولنفرض أن $u+v, u$ عنصرين جبريين على F ، أثبت أن العنصر v جبري على F .

الحل :

لنبرهن أن $F(u,v) \supseteq F$ منتهي ، لدينا $F(u,v) = F(u, u+v)$.
لنكتب $L = F(u+v)$ لنحصل على سلسلة الحقول :

$$F(u+v) \supseteq L(u) \supseteq L \supseteq F$$

الآن $L \supseteq F$ منتهي ، بسبب أن $u+v$ جبري على الحقل F ، و $L(u) \supseteq L$ منتهي بسبب أن u جبري على الحقل L . وهكذا يكون $F(u,v) \supseteq F$ منتهي ، وذلك حسب مبرهنة الضرب .

6- هاتِ مثالاً لكثيرتي حدود ، غير قابلتين للتحليل ومختلفتين ، بحيث يكون لهما حقل الانشطار نفسه .

الحل :

بأخذ : $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = x^2 - 2x - 1$ ، نجد أنهما يملكان نفس حقل الانشطار $Q(\sqrt{2})$ ، والسبب لأن جذور $f(x)$ و $g(x)$ هي $\pm\sqrt{2}$ و $1 \pm \sqrt{2}$ على الترتيب .

7- أثبت أن العدد $u = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ جبري على الحقل Q .

الحل :

باستخدام علاقة دو موافر نجد أولاً أن :

$$\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

بوضع $x = \cos \frac{2\pi}{5}$ و $y = \sin \frac{2\pi}{5}$ ، وبأخذ القسم الحقيقي نجد أن :

$$x^5 - 10x^3y^2 + 5y^4x = 1 \quad (*)$$

وباستخدام العلاقة $y^2 = 1 - x^2$ (لأن $x^2 + y^2 = 1$) في (*) نجد :

$$x^5 - 10x^3(1 - x^2) + 5(1 - x^2)^2x = 1$$

وبالتالي تكون كثيرة الحدود $f(x)$:

$$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1$$

التي يكون العنصر $u = \cos \frac{2\pi}{5}$ جذراً لها . إذن العدد u جبري على الحقل Q .

8- بيّن فيما إذا كان الامتداد $E = Q(i, -i, \sqrt{5}, \sqrt{-5})$ للحقل Q هو امتداد

بسيط .

الحل :

لنبرهن أولاً ، أن $E_1 = Q(i + \sqrt{5})$ يتطابق مع الحقل E ، أي أن $i, \sqrt{5} \in E_1$ ، بما أن $(i + \sqrt{5})^2 \in E_1$ ، وبالتالي فإن :

$$(i + \sqrt{5})^2 = -1 + 2i\sqrt{5} + 5 = 4 + 2i\sqrt{5} \in E_1$$

كذلك نجد أن :

$$(i + \sqrt{5})(4 + 2i\sqrt{5}) = 14i - 2\sqrt{5} \in E_1$$

ويكون :

$$14i - 2\sqrt{5} + 2(i + \sqrt{5}) = 16i \in E_1$$

وبالتالي ، فإن $i \in E_1$ ، ومنه نجد أن :

$$(i + \sqrt{5}) - i = \sqrt{5} \in E_1$$

إذن $i, \sqrt{5} \in E_1$ ، وهذا يعني أن $E_1 \supseteq E$ ، وبما أن $E \supseteq E_1$ ، فيكون $E = E_1$.

إذن الامتداد $E = Q(i, -i, \sqrt{5}, \sqrt{-5})$ بسيط للحقل Q .

9- بين أن حقل الأعداد المركبة C هو إغلاق جبري لحقل الأعداد الحقيقية R ،
 لكنه لا يشكل إغلاق جبري لحقل الأعداد النسبية Q .
 الحل :

إن الحقل C يشكل إغلاقاً جبرياً للحقل R ، لأنه امتداد جبري بسيط وحيث أن
 $C = R(i)$ ، كما أن C مغلق جبرياً ، ولكن الحقل C لا يشكل إغلاقاً جبرياً للحقل
 Q لأنه ليس امتداداً جبرياً للحقل Q حيث أن العنصرين e و π من C متساميان
 على الحقل Q .

10- أوجد كثيرة حدود f ، التي يكون $Q(u)$ حقل انشطار لها على الحقل Q ،
 خذ $u = \sqrt{2} + i$.
 الحل :

بما أن $u = \sqrt{2} + i$ ، فإن $u^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$ ، ومنه يكون : $(u^2 - 1)^2 = -8$ ،
 بذلك يكون u جذراً لكثيرة الحدود : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 9$ ، وبالتالي يكون :

$$f(x) = (x - \sqrt{2} - i)(x + \sqrt{2} + i)(x - \sqrt{2} + i)(x + \sqrt{2} - i)$$

$$= (x^2 - 2\sqrt{2}x + 3)(x^2 + 2\sqrt{2}ix + 3)$$

حيث أن جذور $f(x)$ الأخرى هي : $-\sqrt{2} + i, \sqrt{2} - i$

إذن $f(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحليل على Q ، ومنه يكون f كثيرة حدود
 صغرى للعنصر u على Q . كما أن درجة امتداد $Q(\sqrt{2} + i)$ هي أربعة ، كما
 أن عناصر الأساس له هي :

$$1, \sqrt{2} + i, (\sqrt{2} + i)^2, (\sqrt{2} + i)^3$$

ومنه يكون :

$$Q(\sqrt{2} + i) = \{a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 ; a_0, a_1, a_2, a_3 \in Q\}$$

إن $\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + i)$ ، وبالتالي فإن كل جذور $f(x)$ تنتمي إلى $Q(\sqrt{2} + i)$.
 وبما أن $Q(\sqrt{2} + i)$ يحوي Q ، إذن $Q(\sqrt{2} + i)$ هو حقل انشطار لـ $f(x)$
 على الحقل Q .

11- حدّد رتبة الحقول الجزئية الفعلية من الحقل المنتهي F والذي رتبته P^{40} ، حيث أن P عدد أولي .

الحل :

بما أن القواسم الفعلية للعدد 40 هي : 1 , 2 , 4 , 5 , 8 , 10 , 20 وهي التي تحدد الحقول الجزئية الفعلية من الحقل F ، الذي رتبته P^{40} ، إذن رتب جميع الحقول الجزئية الفعلية منه هي :

$$P, P^2, P^4, P^5, P^8, P^{10}, P^{20}$$

12- إذا كان E امتداداً للحقل F ، وإذا كان $u \in E$ ، أثبت أن التطبيق $\varphi_u: F[x] \rightarrow E$ ، المعرف بالشكل : $\varphi_u(f(x)) = f(u)$ حيث أن $f(x) = \sum_{i=0}^n u_i \cdot x^i \in F[x]$ يشكل تشاكلاً من الحلقة $F[x]$ إلى الحقل E .

الحل :

لتكن $f(x) = \sum_{i=0}^n u_i \cdot x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^m v_i \cdot x^i$ كثيرتي حدود في الحلقة $F[x]$ ،

ولتكن كثيرة الحدود : $h(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^s w_i \cdot x^i$ في $F[x]$ ، عندها

يكون :

$$\varphi_u[f(x) + g(x)] = \varphi_u[h(x)] = h(u) = f(u) + g(u)$$

ومن ناحية ثانية يكون :

$$\varphi_u[f(x)] + \varphi_u[g(x)] = f(u) + g(u)$$

إذن :

$$\varphi_u[f(x) + g(x)] = \varphi_u(f(x)) + \varphi_u(g(x))$$

لنفرض الآن أن :

$$f(x) \cdot g(x) = m(x) = \sum_{i=0}^{n+m} d_i \cdot x^i$$

وبالتالي يكون :

$$[\varphi_u \cdot f(x)] \cdot [\varphi_u \cdot g(x)] = m(u) = f(u) \cdot g(u)$$

ومن ناحية أخرى ، لدينا :

$$\varphi_u[f(x)] \cdot \varphi_u[g(x)] = f(u) \cdot g(u)$$

إذن :

$$\varphi_u[f(x) \cdot g(x)] = \varphi_u(f(x)) \cdot \varphi_u(g(x))$$

نستنتج مما سبق أن φ_u تشاكل حلقي من الحلقة $F[x]$ إلى الحقل E .

13- برهن أن الامتداد $Q(u)$ للحقل Q ناظمي ، حيث أن :

$$u = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

الحل :

بما أن $Q(u)$ حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x) = x^4 + 1 \in Q[x]$ إذن $Q(u)$ امتداد ناظمي للحقل Q .

14- بيّن فيما إذا كان الامتداد $[R : Q]$ منتهياً .

الحل :

بما أن كثيرة الحدود $f(x) = x^n - 2 \in Q[x]$ غير قابلة للتحليل على الحقل Q حيث $n > 1$ ، وبأخذ $E = Q(\sqrt[n]{2})$ ، أي $[E : Q] = n$ فيكون الامتداد R للحقل Q يحوي فضاءات متجهة أبعادها كبيرة ، وبالتالي ، فإن الامتداد R للحقل Q لا يمكن أن يكون منتهياً . إذن $[R:Q]$ غير منتهياً .

15- لتكن $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15 \in Q[x]$ كثيرة حدود على الحقل Q ،

المطلوب ، أوجد امتداداً للحقل Q بحيث يحوي جذوراً لكثيرة الحدود $f(x)$.

الحل :

$$x^4 - 8x^2 + 15 = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$$

إن :

وبأخذ $g(x) = x^2 - 3$ و $h(x) = x^2 - 5$ من $Q[x]$ ، نجد أن $g(x) = x^2 - 3$ كثيرة حدود غير قابلة للتحويل على الحقل Q ، وبالتالي يوجد امتداد للحقل Q يحوي جذوراً لكثيرة الحدود $g(x)$ ، إذن :

$$\begin{aligned} E = Q(u) = Q(\sqrt{3}) &\cong Q[x]/\langle g \rangle \\ &= \{a_0 + a_1u ; a_0, a_1 \in Q, u^2 - 3 = 0\} \\ \text{ومنه نجد : } [Q(\sqrt{3}) : Q] &= 2 \end{aligned}$$

وبنفس المناقشة تماماً ، لأجل كثيرة الحدود $h(x) = x^2 - 5$ ، حيث $h(x)$ كثيرة حدود غير قابلة للتحويل :

$$\begin{aligned} K = E(v) = E(\sqrt{5}) &\cong E[x]/\langle h \rangle \\ &= \{b_0 + b_1v ; b_0, b_1 \in E, v^2 - 5 = 0\} \\ \text{ويكون } [K : E] = 2 &، وحسب مبرهنة الضرب يكون : \end{aligned}$$

$$[K : Q] = [K : E] \cdot [E : Q] = 2 \cdot 2 = 4$$

16- حدّد العناصر المترافقة على الحقل Q لكثيرة الحدود :

$$f(x) = x^2 - 3 \in Q[x]$$

الحل :

نلاحظ بسهولة أن العنصرين $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ من الحقل R مترافقين على Q ، لأنهما جذور لكثيرة الحدود $f(x)$ على الحقل Q .

17- ليكن E امتداداً للحقل F ، وإذا كان φ تماثلاً على الحقل E ، نقول عن

العنصر $u \in E$ إنه يبقى ثابتاً تحت تأثير التماثل φ ، إذا كان $\varphi(u) = u$.

أثبت أن مجموعة كل التماثلات S على الحقل E ، والتي تبقى العناصر $u \in E$ ثابتة تشكل حقلاً جزئياً من E ، نرمز له عادةً بـ E_S ويسمى الحقل الثابت للمجموعة S .

الحل :

بما أن φ_i تماثل لكل $i \in I$ ، عندئذ فإن $\varphi_i(0) = 0$ و $\varphi_i(1) = 1$.

ليكن $\varphi_i(u) = u$ و $\varphi_i(v) = v$ ، لكل $i \in I$ ، وبالتالي يكون لكل $u, v \in E_S$ ،
ولكل $i \in I$:

$$\varphi_i(u \pm v) = \varphi_i(u) \pm \varphi_i(v) = u \pm v$$

$$\varphi_i(u \cdot v) = \varphi_i(u) \cdot \varphi_i(v) = u \cdot v$$

$$\varphi_i(u \cdot v^{-1}) = \varphi_i(u) \cdot \varphi_i(v^{-1}) = u \cdot v^{-1}$$

إذن E_S حقل جزئي من الحقل E .

تطبيق :

وجدنا في المثال (16) السابق أن جذور كثيرة الحدود $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ في الحقل R هما $\pm\sqrt{3}$ ، وبالتالي فإن $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ بالمعرف بالشكل $\varphi : (u + b\sqrt{3}) \longrightarrow (u - b\sqrt{3})$ تماثل ذاتي على الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. وتكون العلاقة $\varphi(a) = a$ محققة ، إذا كان $u + v\sqrt{3} = u - v\sqrt{3}$ أي أن $v = 0$. إذن الحقل الثابت للتماثل φ هو الحقل \mathbb{Q} .

18- إذا كان E و F إغلاقين جبريين للحقل K ، أثبت أن $F \cong E$.

الحل :

لنأخذ التطبيق الشامل $\varphi : K \longrightarrow L$ والمعرف بالشكل $\varphi(u) = u$ لكل u من K ، ومنه . يمتد التطبيق φ إلى التطبيق الأحادي $\phi : E \longrightarrow F$.
وبما أن $\phi(E) = E$ و $\phi(E)$ حقل مغلق جبرياً يحوي الحقل K ، وبما أن F امتداد جبري للحقل K ، فإن F يكون امتداداً جبرياً للحقل $\mathbb{Q}(E)$ والذي يقع بين K و F ،
وبما أن $\phi(E) = F$ ، فإن ϕ يكون تماثلاً من E إلى F .

19- إذا كان $E \supseteq \mathbb{Z}_2$ ويحوي جذر a لكثيرة الحدود :

$f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ على الحقل \mathbb{Z}_2 ، أثبت أن $F = \mathbb{Z}_2(a)$ حقل
انشطار لكثيرة الحدود $f(x)$ التي تتحلل إلى عوامل خطية في $F[x]$.

الحل :

بما أن مميز الحقل \mathbb{Z}_2 يساوي 2 ، فإن $f(x) = (x + a)g(x)$ ،

إن $g(x) = x^2 + 9x + (1 + a^2)$ ، وذلك بعد استخدام عملية القسمة المطلوبة، لنبين أن $g(x)$ تنشط على الحقل F ، عندئذ يكون:

$$F = \{b_0 + b_1 u + b_2 u^2 ; b_i \in Z_2\}$$

بالتقسيم نجد أن :

$$g(x) = (x + a^2) + (x + b) ; b \in F$$

بمقارنة المعاملات للمتغير x نجد أن :

$$b = a + a^2 , a = a^2 + b$$

وبالتالي فإن كثيرة الحدود $f(x)$ تأخذ الشكل :

$$f(x) = (x + a) + (x + a)^2 (x + a + a^2) \in F[x]$$

أي أنها تتحلل على الحقل F .

20- أثبت أن $f(x) = x^4 + x + 1$ غير قابلة للتحليل على الحقل Z_2 ، ثم صف

حقل جالوا $GF(16)$.

الحل :

بما أن كثيرة الحدود $f(x)$ لا تملك جذر في Z_2 ، لذا يمكن كتابة التابع في $Z_2[x]$:

$$x^4 + x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \in Z_2[x]$$

بمقارنة الأمثال نجد أن :

$$b + ac + d = 0 , a + c = 0 , bd = 1 , ad + bc = 1$$

من المعادلات السابقة نجد أن : $b = d = 1 , a = c$ ، ومن المعادلة $b + ac + d$

$= 0$ يكون $a = c = 0$ ، وهذا تناقض مع $ad + bc = 1$. إذن $f(x)$ غير قابلة

للتحليل ، ويكون لدينا :

$$GF(16) = GF(2^4) = \{a + b + c t^2 + d t^3 : a, b, c, d \in Z_2 : t^4 = t + 1\}$$

21- أنشئ حقل جالوا : $GF(125)$

الحل :

إن $125 = 5^3$ ، وبالتالي يمكن بناء حقل ، لنوجد أولاً كثيرة الحدود غير القابلة

للتحليل ومن الدرجة الثالثة على الحقل Z_5 ، ونعلم أن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة قابلة للتحليل على الحقل Z_5 إذا وُجِدَ معامل خطي ، وبالتالي ، فإن كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ تكون غير قابلة للتحليل في $Z_5[x]$ ، إذا ، فقط إذا ، كان $f(u) \neq 0$ حيث $u = 0,1,2,3,4$ في Z_5 . وبالتالي توجد كثيرة حدود $f(x) = x^3 + x + 1$ وهي غير قابلة للتحليل على Z_5 ، لأن :

$$f(0) = 1 , f(1) = 3 , f(2) = 11 , f(3) = 31 , f(4) = 4$$

إذن :

$$GF(125) \cong Z_5[x]/(x^3 + x + 1)$$

22- ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة

في العبارات التالية :

- 1- كل امتداد منتهي لحقل ما ، يكون امتداد جبري (✓)
- 2- كل امتداد جبري لحقل ما ، هو امتداد منتهي (×)
- 3- حقل الأعداد الحقيقية R مغلق جبرياً (×)
- 4- حقل الأعداد المركبة C مغلق جبرياً في $C[x]$ حيث x متغير (✓)
- 5- الحقل المغلق جبرياً يجب أن يكون مميزه صفراً (×)
- 6- لكل عنصرين $u, v \in E$ يوجد دائماً تماثل ذاتي على E ينقل u على v (×)
- 7- إذا كان v, u عنصران جبريان على الحقل F ومترافقين ، عندئذٍ يوجد دائماً تماثل من $F(u)$ على $F(v)$ (✓)
- 8- العدد π متسام على الحقل Q (✓)
- 9- الحقل C هو امتداد بسيط للحقل R (✓)
- 10- كل عنصر من حقل F يكون جبرياً عليه (✓)
- 11- حقل الأعداد الحقيقية R هو امتداد للحقل Q (✓)
- 12- حقل الأعداد النسبية Q هو امتداد للحقل Z_2 (×)
- 13- كل كثيرة حدود غير ثابتة في الحلقة $F[x]$ يكون لها جذر في امتداد ما للحقل F (×)

12- تمرينات غير محلولة للفصل السادس

1- برهن أن العنصر $u \in \mathbb{C}$ جبري على الحقل Q في الحالات التالية :

- (a) $u = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (b) $u = 1 + \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$
 (c) $u = \sqrt{\sqrt{3} - 2i}$ (d) $u = 1 + i$

2- أثبت أن العنصر $u \in \mathbb{C}$ جبري على الحقل Q ، ثم أوجد كثيرة الحدود الصغرى للعنصر u ، وذلك في الحالات التالية :

- (a) $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (b) $u = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$
 (c) $u = \sqrt{2} + i$ (d) $u = \sqrt{1 + i}$

3- بيّن أي من العناصر التالية جبرية وأي منها متسامٍ على الحقل F المشار إليه جانباً ، في كل من الحالات التالية :

- (a) $u = \sqrt{\pi}$, $F = Q(\pi)$ (b) $u = \pi^2$, $F = Q$

4- أثبت أن كثيرة الحدود الصغرى لـ $u = \sqrt{3} - i$ على الحقل R ، هي من الشكل :

$$x + 4\sqrt{3}x^2 - 2$$

5- أوجد أساساً (قاعدة) للامتداد E على الحقل Q ، وذلك في كل مما يلي :

- (a) $E = Q(\sqrt[3]{2})$ (b) $E = Q(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})$
 (c) $E = Q(1 - i)$ (d) $E = Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$

6- أوجد $[E : F]$ في كل من الحالات التالية :

- (a) $E = Q(\sqrt{3} + \sqrt{5})$, $F = Q(\sqrt{3})$
 (b) $E = Q(\sqrt{3} + i)$, $F = Q(i)$

7- إذا كان E امتداداً للحقل F وكان v, u عنصران جبريان من E على F من الدرجتين n, m على الترتيب ، أثبت أن $[F(u, v) : F] \leq m.n$.

8- إذا كان العنصر $u^2 \in E$ جبرياً على الحقل F ، برهن أن العنصر u جبري على F .

9- أوجد حقل انشطار كثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ على الحقل \mathbb{Q} ثم حدّد درجته .

10- أوجد حقل الانشطار E لكثيرات الحدود على الحقل \mathbb{Q} ثم أوجد درجة الامتداد E على \mathbb{Q} في كل من الحالات التالية :

(a) $f(x) = x^3 + 1$

(b) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 7$

(c) $f(x) = x^4 + 1$

(d) $f(x) = x^6 + 2x^3 - 3$

(e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 10x + 10$

11- إذا كان E امتداداً للحقل F ، وإذا كان u عنصراً جبرياً على الحقل F ، عندئذٍ ، كل تشاكل أحادي φ للحقل $F(u)$ في \bar{F} (إغلاق جبري) ، حيث $\varphi(a) = a$ لكل $a \in F$ ينقل العنصر u إلى مرافقه v عبر F .

12- أثبت أن مجموعة كل التماثلات الذاتية للحقل E تشكل زمرة بالنسبة لعملية حاصل تركيب التطبيقات .

13- إذا كان E امتداداً للحقل F ، أثبت أن مجموعة كل التماثلات الذاتية على E والتي تبقى F ثابتة ، تشكل زمرة جزئية من زمرة كل التماثلات الذاتية على E (نرمز عادةً لها بـ $G(E/F)$) .

14- ليكن $\varphi: F \rightarrow L$ تطبيقاً أحادياً من الحقل F إلى الحقل المغلق جبرياً L ، وإذا كان $E = F(u)$ امتداداً جبرياً للحقل F ، أثبت أن التطبيق φ يمكن أن يمتد إلى التطبيق الأحادي $\phi: E \rightarrow L$ ، وتكون درجة الامتداد مساوية لعدد الجذور المختلفة لكثيرة الحدود الصغرى للعنصر u .

15- أنشئ الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على حقل الأعداد النسبية \mathbb{Q} .

- 16-** بين أنه إذا كان u جذراً لكثيرة الحدود $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ فإن $\mathbb{Z}_2[u]$ هو حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x)$ على \mathbb{Z}_2 .
- 17-** أوجد حقل انشطار لكثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ على الحقل \mathbb{Q} ، وحدد درجة امتداده وأساسه على \mathbb{Q} باعتباره فضاء متجهي.
- 18-** أوجد كثيرة حدود f والتي يكون $R(u)$ حقل انشطار لها على الحقل \mathbb{R} ، حيث أن $u = \sqrt{3} + i$.
- 19-** أوجد حقل الانشطار E لكثيرة الحدود $x^3 - 5$ على \mathbb{Q} ثم أثبت أن $[E : \mathbb{Q}] = 6$.
- 20-** أوجد حقل الانشطار لكثيرة الحدود $f(x) = x^6 + x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ على الحقل \mathbb{Z}_2 .
- 21-** أثبت أن كل حقل منته هو حقل تام.
- 22-** أثبت أن $m(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ هي كثيرة حدود صغرى للعنصر الجبري $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ على الحقل \mathbb{Q} .
- 23-** إذا كان u جذراً لكثيرة الحدود $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ، في امتداد E للحقل \mathbb{Z}_2 ، بين أن الحقل الجزئي $\mathbb{Z}_2(u)$ من الامتداد E يتكون من أربعة عناصر.
- 24-** برهن أنه لا يوجد حقل بين الحقلين \mathbb{Q} و $\langle x^2 - 2 \rangle / \mathbb{Q}[x]$.
- 25-** هات مثلاً، توضح فيه أنه ليس من الضروري أن يكون كل امتداد جبري هو امتداد منتهي.
- إرشاد للحل : خذ الامتداد $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p}, \dots)$ على الحقل \mathbb{Q} .
- 26-** ليكن $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما، مميزه $P \neq 0$ ، أثبت أن الحقل F يكون تاماً، إذا وفقط، إذا تحقق الشرط $F = F^P$.
- 27-** ليكن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ، والمطلوب : أوجد $[E : \mathbb{Q}]$ ، ثم أثبت أن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ ، ثم أوجد كثيرة الحدود الصغرى للعنصر $u = \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

على الحقل Q.

28- إذا كان E امتداداً للحقل F ، ولتكن K مجموعة جزئية من E مكونة من العناصر الجبرية على F ، فإن K يشكل حقلاً جزئياً من E يحوي F .

29- أثبت أن لكل حقل ، وليكن F يوجد إغلاق جبري له \bar{F} .

30- أوجد العناصر المترافقة لكل مما يلي :

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $F = \mathbb{Q}$

(b) $\sqrt{3} + i$; $F = \mathbb{R}$

31- أنشئ الحقل $GF(4)$.

32- إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين m,n هو $d = (m,n)$ ، أثبت أن :

$$GF(P^n) \cap GF(P^m) = GF(P^d)$$

حيث أن : $GF(P^n), GF(P^m) \subseteq E$

33- أثبت أنه إذا كانت الزمرة (F^*, \cdot) دائرية ، فإن F حقل منته .

34- إذا كانت f(x) كثيرة حدود غير قابلة للتحليل في $F[x]$ على الحقل F أثبت

أن جميع جذور كثيرة الحدود f(x) تكون مختلفة .

35- أثبت أن كثيرة الحدود $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ قابلة

للفصل على الحقل Q .

36- ليكن P عدداً أولياً ، وإذا كان $F = \mathbb{Z}_p$ و $E = F(u)$ ، حيث u عنصر

متسام على الحقل F ، ولتكن كثيرة الحدود $f(x) = x^p - u \in E[x]$ والتي حقل

انشطارها هو K على E ، وإذا كان v جذراً لكثيرة الحدود f(x) في الحقل K .

أثبت أن $v^p = u$.

37- إذا كان E امتداداً للحقل F ، أثبت أن E يكون امتداداً قابلاً للفصل للحقل

F ، إذا ، فقط إذا كان كل عنصر $u \in E$ قابلاً للفصل على الحقل F .

وإذا كان $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود قابلة للفصل للحقل F ، أثبت أن حقل الانشطار

E لكثيرة الحدود f(x) هو امتداد قابل للفصل للحقل F .

38- إذا كان $(F, +, \cdot)$ حقلاً ما ، وكان $\varphi: F \longrightarrow L$ تطبيقاً متبايناً من الحقل F إلى الحقل المغلق جبرياً L . وليكن $E = F(a)$ امتداداً جبرياً للحقل F . برهن إن التطبيق φ يمكن أن يمتد إلى التطبيق المتباين $\Psi: E \longrightarrow L$ ، وتكون درجة الامتداد مساوية لعدد الجذور المختلفة لكثيرة الحدود الصغرى للعنصر a .

تمارين محلولة وغير محلولة للفصل السابع:

الحلقات الارتينية والنوثيرية

*Artinian and
Noetherian Rings*

13- تمرينات محلولة للفصل السابع

- الحلقات الارتينية والنوثرية -

① ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة:

- 1- كل حقل هو حلقة نوثرية (✓)
- 2- (Z_n, \oplus, \otimes) حلقة نوثرية حيث $n \geq 3$ (×)
- 3- R حلقة ارتينية $\Leftrightarrow R \in \max - \triangleleft$ (×)
- 4- R حلقة نوثرية $\Leftrightarrow R \in \min - \triangleleft$ (×)
- 5- R حلقة نوثرية \Leftrightarrow كل مثالية في R ذات مولدات منتهية (✓)
- 6- إذا كانت R_1, \dots, R_n حلقات نوثرية، فإن $\sum_{i=1}^n R_i \oplus$ حلقة نوثرية (✓)
- 7- إذا كانت $R[x]$ حلقة نوثرية، فإن R حلقة نوثرية (×)
- 8- الجذر الأولي للحلقة $\text{rad}(R)$ هو أكبر مثالية معدومة القوى في R ، حيث R حلقة نوثرية (✓)
- 9- كل مثالية شبه معدومة القوى في أية حلقة نوثرية هي مثالية معدومة القوى (✓)
- 10- إذا كانت $R = (2Z, +, \cdot)$ ، فإن $I = \langle 4 \rangle$ مثالية غير قابلة للتحليل في R (×)

② لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة محايد، وإذا كانت كل مثالية عظمى فيها مولدة

بعنصر متعاقل (أي $\forall a \in R : a^2 = a$) أثبت أن R حلقة نوثرية .

الحل :

لتكن M مثالية عظمى في R .

ولتكن I مثالية ابتدائية في R لكنها ليست عظمى ، وبالتالي فإن $I \subset M$. وبما أن $M = \langle a \rangle$ حيث $0 \neq a \neq 1$ عنصر متعادل ، فإن $0 \in I$: $a(1-a) = 0$ ، وبما أن I مثالية و $a \notin I$ ، وبالتالي يوجد عدد صحيح موجب وليكن n ، بحيث $(1-a)^n \in I$. وبما أن M مثالية أولية ، فيكون $(1-a) \in M$ ، أي أن $1 \in M$ ومنه $R = M$ وهذا غير ممكن . إذن I مثالية أعظمية في الحلقة R ، وبالتالي ، فإن كل مثالية أولية في R هي مثالية أعظمية ، إذن كل مثالية أولية في R مولدة بعنصر واحد . وهذا يعني أن R حلقة نوثرية .

③ (1) أثبت أنه إذا كانت R حلقة نوثرية فإن R/I حلقة نوثرية .

(2) كما أن الصورة التماثلية لحلقة نوثرية هي حلقة نوثرية أيضاً .

الحل :

(1) لنفرض أن $I \triangleleft R$ ، حيث R حلقة نوثرية ، وليكن $\Pi: R \longrightarrow R/I = \bar{R}$ تماثل طبيعي ، وإذا كانت $\bar{I}_1 \subseteq \bar{I}_2 \subseteq \dots$ سلسلة تصاعدية من المثاليات في \bar{R} .

ولنفرض $A_i = \Pi^{-1}(\bar{A}_i)$ ، وبالتالي $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ سلسلة تصاعدية من المثاليات في R ، وبما أن R حلقة نوثرية ، فيوجد عدد صحيح موجب وليكن n بحيث يكون $I_m = I_n$ حيث $m \geq n$ إذن $\bar{I}_m = \bar{I}_n$ لكل $m \geq n$ ، وبالتالي فإن $R/I = \bar{R}$ حلقة نوثرية .

(2) ليكن $\varphi: R \longrightarrow K$ تماثلاً حلقياً شاملاً . وبالتالي يكون :

$S = \text{Ker } \varphi \triangleleft R$ و $R/S \cong K$ ، (حسب النظرية الأساسية في التماثل) . وبما أن R/S حلقة نوثرية حسب (1) ، إذن K حلقة نوثرية .

④ هاتِ مثالاً يوضح ، أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، فقد لا يكون التعبير عن كل مثالية فعلية كحاصل ضرب عدد من المثاليات الابتدائية بشكل وحيد .

الحل :

لنأخذ $R = F[x, y]$ ، إذن R حلقة نوثرية ولنأخذ المثالية R . $I = \langle x^2, xy \rangle \triangleleft R$

لكن :

$$I = \langle x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle = \langle x \rangle \cap \langle x^2, xy, y^2 \rangle$$

وكل من $\langle x \rangle$ و $\langle x^2, y \rangle$ و $\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ مثاليات أولية في الحلقة R .

⑤ لتكن $(R, +, \cdot)$ منطقة تكاملية ارتينية ، أثبت أن R حقل .

الحل :

إذا كان $x \in R, x \neq 0$ ، فيكون $\langle x \rangle \supseteq \langle x^2 \rangle \supseteq \langle x^3 \rangle \supseteq \dots$

سلسلة متناقصة من المثاليات في الحلقة R ، وبما أن R حلقة ارتينية فيوجد عدد صحيح موجب ، وليكن n بحيث يكون $\langle x^n \rangle = \langle x^{n+1} \rangle = \dots$ وبالتالي يوجد عنصر r من R بحيث يكون $x^n = r x^{n+1}$.

وبما أن R منطقة تكاملية ، فيكون $r \cdot x = 1$ ، وبالتالي فإن العنصر x قابل للانعكاس في R ، إذن R حقل .

⑥ لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية ، و S مجموعة جزئية من R ، أثبت من خلال مثال ، أنه قد لا تكون S حلقة ارتينية .

الحل :

لنأخذ الحلقة $R = (Q, +, \cdot)$ و $S = (Z, +, \cdot)$ ، لاحظ أن R هي حلقة ارتينية و $S \leq R$ ، لكن S ليست ارتينية .

14- تمرينات غير محلولة للفصل السابع

① ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة :

- 1- كل حلقة ارتينية هي حقل ()
- 2- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة ليست ارتينية ()
- 3- R حلقة نوثرية $\Leftrightarrow R \in \text{min-}\triangleleft$ ()
- 4- إذا كانت R حلقة ارتينية ، وكانت $I \triangleleft R$ ، فإن R/I حلقة ارتينية ()
- 5- إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة إبدالية، فإن R حلقة نوثرية \Leftrightarrow كل ثنائية أولية في R ذات مولدات منتهية ()
- 6- لنكن R/I و I حلقة نوثرية حيث $I \triangleleft R$ ، فإن R حلقة ارتينية ()
- 7- إذا كانت R حلقة نوثرية ، فإن $R[x, y, z]$ هي حلقة نوثرية ()
- 8- لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بمحايد ، R حلقة ارتينية $\Leftrightarrow R$ هي حلقة نوثرية وكانت كل مثالية أولية فعلية فيها مثالية ابتدائية ()
- 9- إذا كانت M_1, \dots, M_n مثاليات أعظمية في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بمحايد ، فإن R حلقة نوثرية $\Leftrightarrow R$ حلقة ارتينية ()
- 10- كل حلقة منتهية هي حلقة ارتينية ()

② أثبت أن الشروط التالية متكافئة من أجل أي حلقة :

(1) الحلقة R نوثرية .

(2) كل مثالية من R منتهية التوليد .

③ لنكن $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثرية ، وإذا كانت $I \triangleleft R$ ، عندئذ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$

بحيث يكون : $(\text{rad}(I))^n \subseteq I$.

④ إذا كانت J مثالية ابتدائية في الحلقة النوثيرية R ، وإذا كانت K ، I مثاليتين في R بحيث $I.K \subseteq J$ ، فإما $I \subseteq J$ أو يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث يكون $(\sqrt{k})^n \subseteq J$.

⑤ إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة نوثيرية ، وكانت J ، I مثاليتين ابتدائيتين فيها ، فإن $I \cap J$ قد لا يكون مثالية ابتدائية في R . المطلوب قدّم مثلاً يوضح هذه الحقيقة الجبرية .

⑥ إذا كانت $R = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}, +, \cdot \right)$ ، أثبت أن R حلقة ارتينية .

⑦ لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ارتينية ، أثبت أن كل مثالية أولية فيها هي مثالية أعظمية .

⑧ أثبت أنه إذا كانت R حلقة ارتينية ، فإن :

(1) $J(R)$ هي أكبر مثالية معدومة القوى في R .

(2) كل مثالية شبه معدومة القوى في R هي مثالية معدومة القوى .

⑨ لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما ، أثبت أن الشروط التالية متكافئة :

(1) الحلقة R نوثيرية .

(2) الحلقة R تحقق شرط السلاسل المتزايدة (المتصاعدة) من المثاليات في

الحلقة R ، والتي كل منها لا يساوي الصفر .

⑩ أثبت أنه إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة محايد ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي

تكون R حلقة ارتينية هو أن تكون R حلقة نوثيرية وكل مثالية أولية فعلية فيها هي مثالية أعظمية .

ثبتت المصطلحات العلمية

ثبت المصطلحات العلمية

أ

Commutative	إبدالية
Abelian	آبلية
Union	اتحاد
Trace	أثر
Embedding	إدخال
Linearly dependence	ارتباط خطي
Basis	أساس
Linearly independence	استقلال خطي
Projection	إسقاط
Algebraic numbers	أعداد جبرية
Algebraic integers	أعداد جبرية صحيحة
Relatively prime integers	أعداد صحيحة أولية نسبياً
Restriction of mapping	اقتصار تطبيق
Euclidian	إقليدي
Extension	امتداد
Simple extension	امتداد بسيط
Algebraic extension	امتداد جبري
Finite extension	امتداد منته
Normal extension	امتداد ناظمي
Reflexive	انعكاسية

Prime

أولي

ب

Quadratic residue

باقي تربيعي

Primitive

بدائي

Dimension

بُعد

Structure

بنية

ت

Permutation

تبديل

Even permutation

تبديل زوجي

Partition

تجزئة

Associative

تجميعي (دامج)

Linear transformation

تحويل خطي

Idempotent linear transformation

تحويل متساوي القوى

Nilpotent linear transformation

تحويل معدوم القوى

Normal linear transformation

تحويل خطي ناظمي

Hermitian linear transformation

تحويل خطي هرميتي

Unitary linear transformation

تحويل خطي واحدي

Conjugation

ترافق

Composition of mapping

تركيب تطبيقات

Homomorphism

تشاكل

Homomorphism of rings

تشاكل الحلقات

Homomorphism of groups

تشاكل الزمر

Homomorphism of modules

تشاكل الفضاءات الحلقية

Homomorphism of vector spaces

تشاكل فضاءات المتجهات

Congruence	تطابق
Congruence module n	تطابق قياس n
Mapping	تطبيق
One - to - one mapping	تطبيق أحادي
Onto mapping	تطبيق غامر
Transitivity	تعدي
Decomposition	تفريق
One - to - one correspondence	تقابل
Division	تقسيم
Multiplicity	تكرار
Multiplicity of roots	تكرار الجذور
Multiplicity of characteristic roots	تكرار الجذور المميزة
Isomorphism	تمائل
Isomorphism of rings	تمائل الحلقات
Automorphism	تمائل ذاتي
Outer automorphism	تمائل ذاتي خارجي
Inner automorphism	تمائل ذاتي داخلي
Isomorphism of groups	تمائل الزمر
Isomorphism of modules spaces	تمائل الفضاءات الحلقية
Isomorphism of vector spaces	تمائل فضاءات المتجهات
Representation	تمثيل
Symmetric	تناظر
Linear span	توليد خطي



Algebra	جبر
Boolean algebra	جبر بوليني
Algebra of linear transformation	جبر التحويلات الخطية

Linear algebra	جبر خطي
Algebraic division algebra	جبر القسمة الجبري
Matrix algebra	جبر المصفوفات
Algebraic	جبري
Algebraic of degree n	جبري من الدرجة n
Root	جذر
Primitive root	جذر بدائي
Primitive root of prime number	جذر بدائي للعدد الأولي
Primitive root of nth root of unity	جذر بدائي للواحد من رتبة n
Root of polynomial	جذر كثيرة الحدود
Radical of an ideal	جذر المثالية
Multiple of root	جذر مكرر
Characteristic root	جذر مميز
Sum	جمع
Direct sum	جمع مباشر
External direct sum	جمع مباشر خارجي
Internal direct sum	جمع مباشر داخلي



Field	حقل
Splitting field	حقل انشطار
Skew- field	حقل تخالفي
Field of quotients	حقل خوارج القسمة
Isomorphic rings	حلقات متماثلة
Ring	حلقة
Commutative ring	حلقة إبدالية
Artinian ring	حلقة آرتينية
Euclidian ring	حلقة إقليدية

Ring of linear transformation	حلقة التحويلات الخطية
Ring of 2x2 matrices	حلقة المصفوفات من نوع 2x2
Ring with unity	حلقة بعنصر وحدة
Boolean ring	حلقة بولينية
Integral domain	حلقة تامة (منطقة تكاملية)
Associative ring	حلقة تجميعية
Quotient ring	حلقة خارجة
Semi simple ring	حلقة شبه بسيطة
Non associative ring	حلقة غير تجميعية
Division ring	حلقة قسمة
Ring of polynomials	حلقة كثيرات الحدود
Ring of polynomials in n variable	حلقة كثيرات الحدود في n متغير
Noetherian ring	حلقة نوثيرية



Quotient	خارج
Ascending chain condition	خاصية السلسلة المتصاعدة
Descending chain condition	خاصية السلسلة المتنازلة (المتناقصة)
Linear	خطي
Algorithm	خوارزم
Euclidian algorithm	خوارزم إقليدي
Division algorithm	خوارزم القسمة
Left division algorithm	خوارزم القسمة الأيسر



Functional	دالي
Linear functional	دالي خطي
Degree	درجة

Degree of extension	درجة الامتداد
Degree of polynomial	درجة كثيرة الحدود
Index	دليل
Index of nilpotence	دليل انعدام القوى
Elementary functions	دوال ابتدائية
Rational functions	دوال نسبية
Period	دور
Period of an element	دور العنصر
Cyclic	دوري



Order	رتبة
Order of a group	رتبة الزمرة
Order of an element	رتبة العنصر



Isomorphic groups	زمر متماثلة
Conjugate subgroups	زمر جزئية مترافقة
Group	زمرة
Commutative group	زمرة إبدالية
Abelian group	زمرة أبيلية
Simple group	زمرة بسيطة
Permutation group	زمرة التبديلات
Group of outer automorphism	زمرة التماثلات الذاتية الخارجية
Group of inner automorphism	زمرة التماثلات الذاتية الداخلية
Symmetric group of degree n	زمرة التناظر من الدرجة n
Galois group	زمرة جالوا
Subgroup	زمرة جزئية

Trivial subgroup	زمرة جزئية تافهة
Cyclic subgroup	زمرة جزئية دورية
Normal subgroup	زمرة جزئية ناظرية
Quotient group	زمرة خارجة
Cyclic subgroup	زمرة دورية
Dihedral group	زمرة زوجية
Solvable group	زمرة قابلة للحل
Nilpotent group	زمرة معدومة القوى
Finite group	زمرة منتهية

ش

Singular	شاذ
Associate	شريك

ص

Row of matrix	صف المصفوفة
Image	صورة
Inverse image	صورة معكوسة
Quadratic form	صورة صيغة تربيعية
Real quadratic form	صورة صيغة تربيعية حقيقية
Canonical form	صورة قانونية

ض

Product of mappings	ضرب تطبيقات
Inner product	ضرب داخلي
Cartesian product	ضرب ديكارتي
Scalar product	ضرب قياسي
Direct product	ضرب مباشر
External direct product	ضرب مباشر خارجي

Internal direct product

ضرب مباشر داخلي

ع

Cofactor

عامل مرافق

Algebraic number

عدد جبري

Algebraic integer

عدد جبري صحيح

Transcendental number

عدد متسام

Relation

علاقة

Reflexive relation

علاقة انعكاسية

Equivalence relation

علاقة تكافؤ

Binary relation

علاقة ثنائية

Transitive relation

علاقة متعدية

Symmetric relation

علاقة متناظرة

Column of matrix

عمود مصفوفة

Maximal element

عنصر أعظمي

Prime element

عنصر أولي

Algebraic element

عنصر جبري

Irreducible element

عنصر غير مختزل

Identity element

عنصر محايد

غ

Onto

غامر (شامل)

Non commutative

غير إبدالي

Non associative

غير تجميعي

Invariant

غير متغير

Irreducible

غير مختزل

Infinite

غير منته

ف

Symmetric difference	فرق تناظري
Conjugacy class	فصل ترافق
Similarity class	فصل تشابه
Congruence class	فصل تطابق
Equivalence class	فصل تكافؤ
Module	فضاء حلقي
Submodule	فضاء حلقي جزئي
Quotient module	فضاء حلقي خارج
Irreducible module	فضاء حلقي غير مختزل
Finitely generated module	فضاء حلقي منته التوليد
Unital module	فضاء حلقي واحد
Vector space	فضاء متجهات
subspace	فضاء متجهات جزئي
Real vector space	فضاء متجهات حقيقي
Quotient vector space	فضاء متجهات خارج

ق

Solvable	قابل للحل
Separable	قابل للفصل
Divisibility	قابلية القسمة
Divisor	قاسم
Zero divisor	قاسم للصفر
Greatest common divisor	قاسم مشترك أعظم
Associative law	التجميع (الدمج)
Adjoint	قرين

Division	قسمة
Algebraic division	قسمة جبرية
Elementary divisors	قواسم ابتدائية
Distribution laws	قوانين التوزيع
Scalar	قياسي

ك

Polynomial	كثيرة حدود
Minimal polynomial	كثيرة حدود دنيا
Primitive polynomial	كثيرة حدود بدائية
Cyclotomic polynomial	كثيرة حدود دورية
Irreducible polynomial	كثيرة حدود غير مختزلة
Symmetric polynomial	كثيرة حدود متناظرة
Characteristic polynomial	كثيرة حدود مميزة

م

Commutator	مبدل
Theorem	مبرهنة
Inequality	متباينة
Complement	متمة
Maximal ideal	مثالي أعظمي
Prime ideal	مثالي أولي
Left ideal	مثالي أيسر
Right ideal	مثالي أيمن
Principal ideal	مثالي رئيس
Ideal	مثالية
Primary ideal	مثالية ابتدائية
Prime ideal	مثالية أولية

Nil ideal	مثالية شبه معدومة القوى
Irreducible ideal	مثالية غير قابلة للتحليل
Nilpotent ideal	مثالية معدومة القوى
Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Set	مجموعة
Set of integers moduls n	مجموعة الأعداد الصحيحة قياس n
Decomposable set of linear transformation	مجموعة التحويلات الخطية القابلة للتفريق
Irreducible set of linear transformation	مجموعة التحويلات الخطية غير المختزلة
Index set	مجموعة الدليل
Subset	مجموعة جزئية
Proper subset	مجموعة جزئية فعلية
Empty set	مجموعة خالية
Infinite set	مجموعة غير منتهية
Coset	مجموعة مشاركة
Double coset	مجموعة مشاركة مزدوجة
Determinant	محددة
Range	مدى
Conjugate	مرافق
Rank	مرتبة
Rank of linear transformation	مرتبة التحويل الخطي
Rank of module	مرتبة الفضاء الحلقى
Rank of matrix	مرتبة المصفوفة
Center of a group	مركز الزمرة
Similar	مشابه
Derivative	مشتقة

Matrix	مصفوفة
Matrix unit	مصفوفة الوحدة
Permutation matrix	مصفوفة تبديلية
Zero matrix	مصفوفة صفرية
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
Companion matrix	مصفوفة مصاحبة
$n \times n$ matrix	مصفوفة من نوع $n \times n$
Least common multiple	مضاعف مشترك أصغر
Congruent	مطابق
Coefficients	معاملات
Inverse	معكوس
Right inverse	معكوس أيسر
Right inverse	معكوس أيمن
Inverse of mapping	معكوس تطبيق
Inverse of element	معكوس عنصر
Criterion	معيار
Annihilator	مفني
Modulus	مقياس
Centralizer	مركز
Characteristic	مميز
Characteristic of integral domain	مميز الحلقة التامة
Zero characteristic	مميز صفري
Finite	منته
Finite dimensional	منته البعد
Finite characteristic	منته المميز

Normalizer

منظم (معاير)

Transpose

منقول

Generator

مولد

ن

Multiplicative system

نظام ضربي

Kernal

نواة

و

Unital

واحدى

Unit

وحدة

الرموز المستخدمة

الرموز المستخدمة

حلقة الأعداد الصحيحة	Z
حلقة الأعداد النسبية	Q
حلقة الأعداد الحقيقية	R
حلقة الأعداد المركبة	C
حلقة الأعداد الصحيحة قيس n	Z_n
حلقة القسمة للحلقة R بالمثالية I	R/I
حلقة القسمة للحلقة M على N	M/N
حلقة كثيرات الحدود على الحلقة R	$R[x]$
درجة كثير الحدود f	deg f
محدد المصفوفة A	det (A)
زمرة التشاكلات الذاتية للحلقة R	Aut R
زمرة التشاكلات الذاتية الداخلية للحلقة R	Im R
حلقة التشاكلات الذاتية للحلقة M على الحلقة R	$\text{Hom}_R(M) = \text{End}_R(M)$
الزمرة الدائرية المولدة بالعنصر a	$\langle a \rangle$
مثالية مولدة بالعنصر a	(a)
مميز الحلقة R	char R
زمرة الوحدات للحلقة R	G_R
الزمرة الخطية العامة من الدرجة n على الحقل F	$GL_n(F)$
صفوف التكافؤ لـ S	[S]
علاقة توافق أو يوافق قياس	\equiv

تماثل حلقي	\cong
مركز الحلقة R	$Z(R)$
القاسم المشترك الأعظم	gcd
المضاعف المشترك الأصغر	ℓ cm
رتبة لـ S	$ S $
رتبة المصفوفة A	Rank (A)
بُعد الفضاء المتجهي V	dim (V)
رتبة كثيرة الحدود f	ord (f)
مشتق كثيرة الحدود f	f'
درجة الحقل L على K (درجة التوسعة)	$[L : K]$
نواة للتشاكل f	Ker f
القاسم المشترك الأصغر	$[a, b]$
القاسم المشترك الأعظم	(a, b)
b, a أوليان نسبياً	$(a, b) = 1$
العنصر a يقسم العنصر b	a/b
مثالية	I
فصل تكافؤ a	$[a] = \overline{a}$
أساس جاكبسون للحلقة R (جذر جاكبسون)	J(R)
الأساس الأولي للحلقة R ، أو جذر الحلقة R	rad (R)
الزمرة الجزئية الناظرية	\triangleleft
S حلقة جزئية من الحلقة R	$S \leq R$
مجموع مباشر للحلقات	\oplus

حلقة كثيرات الحدود بمتحول واحد على R	$R[x]$
مجموعة العناصر القابلة للانعكاس في R	$U(R)$
I مثالية في الحلقة $(R, +, \cdot)$	$I \triangleleft R$
جذر المثالية I	\sqrt{I}
حقل جالوا	$GF(P^n)$
الحقل الثابت للمجموعة S	E_S

المراجع

References

المراجع العربية

- ١- د. صفوان عويرة، أ. محمد عبد الباقي، نظرية الزمر، مكتبة المتنبّي ١٤٢٧ - ١٤٢٨ هـ .
- ٢- د. يوسف الوادي، د. حمزة حاكمي، البنى الجبرية ، جامعة دمشق ، ١٤٢٧ - ١٤٢٨ هـ .
- ٣- د. نادر النادر ، الجبر (3) - جامعة حلب ١٤٠١ - ١٤٠٢ هـ .
- ٤- د. فوزي الذكير ود. علي السحيباني، مواضيع في الجبر، جامعة الملك سعود ، ١٤١٤ هـ .
- ٥- فالج الدوسري - مقدمة في نظرية الحلقات والحقول ، مكة المكرمة ١٤٢٠ هـ .

المراجع الأجنبية

- Carl Faith , Algebra II Ring theory , Springer-Verlay, Berlin,1976 (١)
- Donald S.passam,Acourse in Ring theory California, 1991 (٢)
- Flachsmeyer . J, Prohaska,L, Algebra VEB Deutscher verlay der wissenschaften , Berlin , 1976 (٣)
- Günter Scheja , Lehrbuch der Algebra ,B. G. Teubner, Stuttgart, 1988 (٤)
- Hideyuki Matsumura,Commutative Ring theory Cambridge university Press,2002 (٥)
- Iain T. Adamson , Introduction to Field theory , New york, 1964 (٦)
- John B.Fraleigh, Afirst course in Abstract Algebra ,Newyork,2003 (٧)
- Joseph A.Gallian,Contemporary Abstract Algebra,Newyork,2002 (٨)
- Kuhnert,Verlesungen über Algebra , VEB Deutscher verlay Berlin , 1976 (٩)
- Nathan Jacobso, Lectures in Abstract Algebra New york, 1999 (١٠)
- Oniscik. A. L, Sulanke, R, Algebra und Geometric VEB Deutscher verlay der wissenschaften , Berlin , 1976 (١١)
- Renschuch. B, Elementar und praktische Idealtheorie , VEB Deutscher verlay der wissenschaften , Berlin , 1979 (١٢)
- Rudoff lial , Introduction to finite field,s and their application , New york , 1988 (١٣)
- Ul.N.Hersteim,Topics Algebra,printed in the U.S.A , 1975 (١٤)
- Keitb W. Nicbolson, Introduction to Abstract Algebra,London,1993 (١٥)
- Lam.Y.T , Exercises in classical Ring theory Spring-Verlay,Berlin,1994 (١٦)
- Zariski ,O, Samuel,P,Commutative algebra ,Vol, Springer, 1958 ,New york. (١٧)